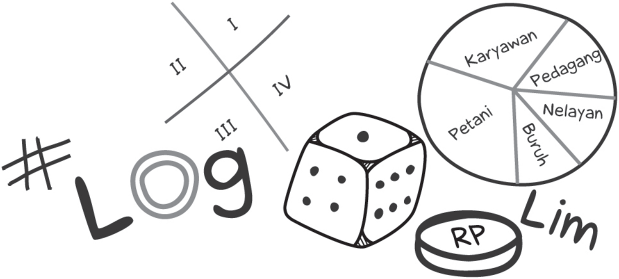
MATEMATIKA SOSHUM

Bab 1#

Eksponen dan Logaritma



A. PENGERTIAN

- Bilangan berekesponen (berpangkat) dinyatakan dalam bentuk:

$$a^b = c$$

- Logaritma dinyatakan dalam bentuk:

$${}^{a}\log c = b \leftrightarrow a^b = c$$

Syarat: $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$

- Keterangan:
  a = bilangan pokok (basis)
  b = pangkat (eksponen)
  c = hasil perpangkatan

B. SIFAT-SIFAT

1. Sifat-sifat Eksponen

- $a^0 = 1$ untuk $a \neq 0$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$

- $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
- $(a.b)^n = a^n.b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

2. Sifat-sifat Logaritma

- ${}^{a}\log 1 = 0$
- ${}^{a}\log b = \dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a}$
- ${}^{a}\log b + {}^{a}\log c = {}^{a}\log (bc)$
- ${}^{a}\log b - {}^{a}\log c = {}^{a}\log \left(\dfrac{9}{p}\right)$
- ${}^{a}\log b^n = n.{}^{a}\log b$
- ${}^{a^n}\log b = \dfrac{1}{n}.\,{}^{a}\log b$
- ${}^{a}\log b = \dfrac{1}{{}^{b}\log a}$
- ${}^{a}\log b.\ {}^{b}\log c.\ {}^{c}\log d = {}^{a}\log d$
- $a^{{}^{a}\log b} = b$
- ${}^{a^n}\log x^m = \dfrac{m}{n}.\,{}^{a}\log x$
- ${}^{a}\log a = 1$

Contoh:

Sederhanakanlah:

1. $^{2}\log 32 - {}^{2}\log 8 + {}^{2}\log 4$
2. $^{3}\log 4.\ {}^{4}\log 5.\ {}^{5}\log 6.\ {}^{6}\log 9$

Jawab:

1. $= {}^{2}\log 32 - {}^{2}\log 8 + {}^{2}\log 4$

   $= {}^{2}\log (32 : 8) + {}^{2}\log 4$

   $= {}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 4$

   $= {}^{2}\log (4.4)$

   $= {}^{2}\log 16$

   $= {}^{2}\log 2^{4} = 4$

2. $= {}^{3}\log 4.\ {}^{4}\log 5.\ {}^{5}\log 6.\ {}^{6}\log 9$

   $= {}^{3}\log 9$

   $= {}^{3}\log 3^{2} = 2$

B. PERSAMAAN EKSPONEN DAN LOGARITMA

1. Persamaan Eksponen:

- $a^{f(x)} = 1 \neq f(x) = 0$, dengan $f(x) > 0$
- $a^{f(x)} = a^{b} \neq f(x) = b$
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \neq f(x) = g(x)$
- $a^{f(x)} = b^{g(x)} \neq \log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$

2. Persamaan Logaritma

- ${}^{a}\log f(x) = c \neq f(x) = a^{c}$, dengan $f(x) > 0$
- ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x) \neq f(x) = g(x)$, dengan $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
- ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x) \neq f(x) = g(x)$, dengan $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, dan $h(x) \neq 1$

Contoh:

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari

   $4^{x^2+1} = 64^{\frac{2}{3}x}$!

   Jawab:

$$4^{x^2+1} = 64^{\frac{2}{3}x}$$
$$4^{x^2+1} = \left(4^3\right)^{\frac{2}{3}x}$$
$$4^{x^2+1} = 4^{2x}$$
$$x^2 + 1 = 2x$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

2. Penyelesaian persamaan $^{3}\log(9^{x}+18)=2+x$ adalah p dan q maka $p + q = \ldots$

Jawab:

$$^{3}\log (9^{x} + 18) = 2 + x$$

$$\cancel{^{3}\log} (9^{x} + 18) = \cancel{^{3}\log}\ 3^{(2 + x)}$$

$$9^{x} + 18 = 3^{(2 + x)}$$

$$3^{2x} + 18 = 3^{2} . 3^{x}$$

$$(3^{x})^{2} - 9. 3^{x} + 18 = 0$$

Misalkan, $3^{x} = a$

$$a^{2} - 9a + 18 = 0$$

$$(a - 3) (a - 6) = 0$$

$$a = 3 \text{ dan } a = 6$$

$3^{x} = 3$ maka $x_1 = p = 1$

$3^{x} = 6$ maka $x_2 = q = {}^{3}\log 6$

Jadi:

$p + q = 1 + {}^{3}\log 6$

$= {}^{3}\log 3 + {}^{3}\log 6$

$= {}^{3}\log (3.6) = {}^{3}\log 18$

C. PERTIDAKSAMAAN EKSPONEN DAN LOGARITMA

1. Pertidaksamaan Eksponen:

a) Untuk a > 1

$a^{f(x)} \neq a^{g(x)} \neq f(x) \neq g(x)$

$a^{f(x)} \neq a^{g(x)} \neq f(x) \neq g(x)$

b) Untuk 0 < a < 1

$a^{f(x)} \neq a^{g(x)} \neq f(x) \neq g(x)$

$a^{f(x)} \neq a^{g(x)} \neq f(x) \neq g(x)$

2. Pertidaksamaan Logaritma:

a) Untuk a > 1

${}^a\log f(x) < {}^a\log a^m$ maka $f(x) < a^m$

${}^a\log f(x) > {}^a\log a^m$ maka $f(x) > a^m$

${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$ maka $f(x) < g(x)$

${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$ maka $f(x) > g(x)$

b) Untuk 0 < a < 1

${}^a\log f(x) < {}^a\log a^m$ maka $f(x) > a^m$

${}^a\log f(x) > {}^a\log a^m$ maka $f(x) < a^m$

${}^a\log f(x) < {}^a\log g(x)$ maka $f(x) > g(x)$

${}^a\log f(x) > {}^a\log g(x)$ maka $f(x) < g(x)$

Contoh:

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan:

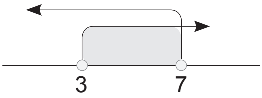
$\log(25x - 75) < 2$

Jawab:

$$\begin{aligned} \log(25x - 75) &< 2 \\ \log(25x - 75) &< \log 10^2 \\ 25x - 75 &< 100 \\ 25x &< 175 \\ x &< 7 \text{ ....(i)} \end{aligned}$$

Syarat logaritma:

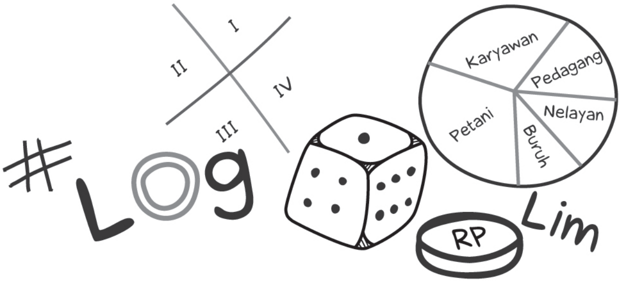
$$\begin{aligned} 25x - 75 &> 0 \\ 25x &> 75 \\ x &> 3 \text{ ....(ii)} \end{aligned}$$



Jadi, HP = {3 < x < 7}

Bab 2#

Gradien dan Persamaan Garis Singgung



A. PENGERTIAN GRADIEN

Gradien adalah ukuran untuk menentukan kemiringan suatu garis, atau disebut juga tangen yang dinotasikan dengan m.

B. RUMUS MENENTUKAN GRADIEN

1. Menentukan kemiringan garis jika diketahui dua buah titik.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh:

Tentukan gradien garis yang melalui titik (6, –3) dan (2, 5)!

Jawab:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-3)}{2 - 6} = \frac{8}{-4} = -2$$

2. Menentukan kemiringan garis jika diketahui persamaan:

- $y = mx + c \rightarrow$ gradiennya m
- $ax + by + c = 0 \rightarrow$ gradiennya (m) = $\frac{-a}{b}$

C. PERSAMAAN GARIS LURUS

Rumus untuk menentukan persamaan garis lurus, yaitu:

- Jika diketahui satu titik (x_1,y_1) dan gradien m:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

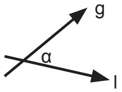
- Jika diketahui dua titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2):

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

D. HUBUNGAN GRADIEN DUA BUAH GARIS

Hubungan dua buah garis, yaitu:

- Dua garis saling sejajar jika $m_1 = m_2$
- Dua garis saling tegak lurus jika $m_1.m_2 = -1$
- Dua garis membentuk sudut α



$$\boxed{tg\alpha = \left|\frac{m_g - m_l}{1 + m_g.m_l}\right|}$$

E. RUMUS JARAK

- Jarak antara titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2):

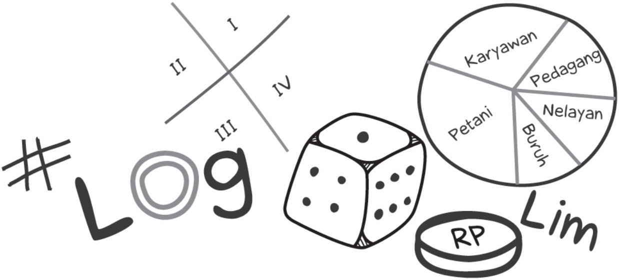
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Jarak titik (x_1,y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Bab 3#

Persamaan Kuadrat



A. BENTUK UMUM

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dimana, a, b, c $\rightarrow$ R dan a $\rightarrow$ 0.

B. PENYELESAIAN PERSAMAAN KUADRAT

1. Memfaktorkan

$$a(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$$

Contoh:

Tentukan akar-akar dari $x^2 + 3x - 10 = 0$

Jawab:

Cari dua bilangan yang apabila dijumlahkan hasilnya 3 dan apabila dikalikan hasilnya –10. Diperoleh dua bilangan, yaitu 5 dan –2.

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ (x + 5)\,(x - 2) &= 0 \\ x = -5 \text{ atau } x &= 2 \end{aligned}$$

2. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ diubah menjadi $(x + p)^2 = q$ dengan $p = \dfrac{6}{2}$ dan $q = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - c$

Contoh:

Tentukan akar-akar dari $x^2 + 6x - 10 = 0$!

Jawab:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 10 &= 0 \\ x^2 + 6x &= 10 \\ x^2 + 6x + 9 &= 10 + 9 \\ (x + 3)^2 &= 19 \\ x + 3 &= \pm\sqrt{19} \end{aligned}$$

Jadi, $x_1 = \sqrt{19} - 3$ atau $x_2 = -\sqrt{19} - 3$

3. Menggunakan Rumus

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh:

Tentukan akar-akar dari $x^2 - 6x + 8 = 0$

Jawab:

Dari persamaan diketahui:

$a = 1$, $b = -6$, dan $c = 8$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36 - 4.(1).(8)}}{2.(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Jadi, $x_1 = 4$ atau $x_2 = 2$

C. JENIS AKAR PERSAMAAN KUADRAT

1. $D > 0$ maka kedua akarnya real dan berbeda.
2. $D = 0$ maka kedua akarnya real dan sama (kembar)
3. $D < 0$ maka kedua akarnya tidak real

D adalah diskriminan dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ yang dirumuskan:

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

D. OPERASI PERHITUNGAN AKAR-AKAR

- $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1 . x_2 = \dfrac{6}{2}$
- $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

Contoh:

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $2x^2 - 8x + 6$. Tentukan jumlah dan hasil kali akar!

Jawab:

Jumlah akar-akarnya:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{2.(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

Hasil kali akar-akarnya:

$$x_1.x_2 = \frac{6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

E. MENYUSUN PERSAMAAN KUADRAT

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat maka persamaan kuadratnya adalah:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

atau

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$

Contoh:

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya –3 dan 7!

Jawab:

$x_1 = -3$ dan $x_2 = 7$

Cara 1:

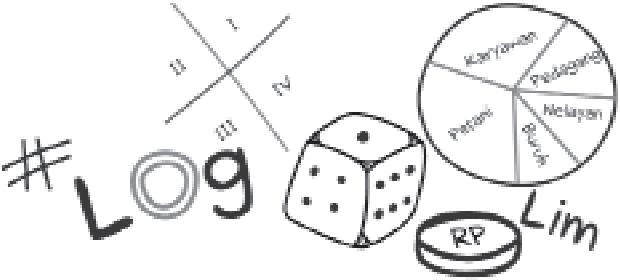
$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$(x + 3)(x - 7) = 0$$
$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

Cara 2:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$
$$x^2 - (-3 + 7)x + (-3).(7) = 0$$
$$x^2 - 4x - 21 = 0$$

Bab 4#

Fungsi Kuadrat



A. BENTUK UMUM

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

Dimana a, b, c $\rightarrow$R dan a $\rightarrow$ 0.

B. MENGGAMBAR KURVA FUNGSI KUADRAT (PARABOLA)

Untuk menggambar parabola $y = ax^2 + bx + c$ dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Menentukan titik potong dengan sumbu x (jika ada), syarat y = 0.
2) Menentukan titik potong grafik dengan sumbu y, syarat x =0.
3) Menentukan persamaan sumbu simetri dengan rumus:

$$x_e = -\frac{b}{2a}$$

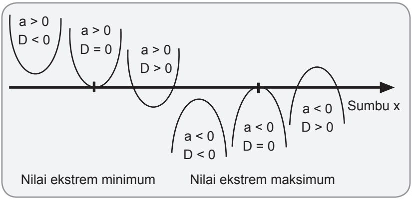
4) Menentukan nilai maksimum atau minimum menggunakan rumus:

$$y_e = \frac{D}{-4a}$$

5) Menentukan beberapa titik bantu jika diperlukan.

C. KEDUDUKAN GRAFIK FUNGSI KUADRAT

1. Posisi Terhadap Sumbu X



- Suatu fungsi disebut **definit positif** jika selalu berada di atas sumbu x atau a > 0 dan D $\rightarrow$0.
- Suatu fungsi disebut **definit negatif** jika selalu berada di atas sumbu x atau a < 0 dan D $\rightarrow$0.

2. Posisi Terhadap Sumbu Y

- Jika a > 0, b > 0 atau a < 0, b < 0 maka puncak di kiri sumbu y.
- Jika a < 0, b > 0 atau a > 0, b < 0 maka puncak di kanan sumbu y.

D. MEMBENTUK FUNGSI KUADRAT (PERSAMAAN PARABOLA)

1. Jika diketahui tiga titik sembarang maka substitusikan ketiga titik tersebut ke $y = ax^2 + bx + c$ lalu eliminasi.
2. Jika diketahui dua titik potong dengan sumbu x, yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ dan satu titik lainnya maka gunakan rumus:

   $$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

3. Jika diketahui titik puncak/ekstrem (x_e, y_e) dan satu titik lainnya maka gunakan rumus:

   $$y = a(x - x_e)^2 + y_e$$

Contoh Soal:

Tentukan fungsi kuadrat yang melalui titik titik potong (1, 0), (3, 0) dan sebuah titik sembarang (0, 3)!

Jawab:

Substitusikan titik potong (1, 0) dan (3, 0) ke rumus, diperoleh:

$y = a(x - 1)(x - 3)$

Substitusi titik (0, 3) maka:

$3 = a(0 – 1)(0 – 3)$

$3 = a(– 1)(– 3)$

$a = 1$

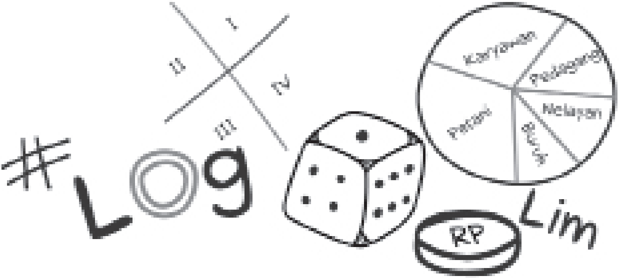
Maka, persamaan kuadratnya adalah:

$y = 1(x – 1)(x – 3)$

$y = x^2 – 4x + 3$

Bab 5#

Pertidaksamaan



A. PENGERTIAN

Pertidaksamaan adalah suatu kalimat terbuka dengan ruas kiri dan ruas kanan dihubungkan oleh salah satu dari lambang >, <, ≥, atau ≤.

B. JENIS-JENIS PERTIDAKSAMAAN

1. Pertidaksamaan Linier

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan linier, yaitu:

- Cari bentuk paling sederhana dari pertidaksamaan linier tersebut.
- Jika kedua ruas ditambah atau dikurang dengan suatu bilangan yang sama maka tanda pertidaksamaan tetap.

Jika $a > b$ maka:

$$a + c > b + c$$
$$a - c > b - c$$

Jika $a < b$ maka:

$$a + c < b + c$$
$$a - c < b - c$$

Contoh:

$$x + 2 > 5$$
$$x + 2 - 2 > 5 - 2$$

$x > 3$

- Jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan suatu bilangan positif maka tanda pertidaksamaan tetap.

Jika $a > b$ dan $c > 0$ maka:

$a.c > b.c$

$a : c > b : c$

Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka:

$a.c < b.c$

$a : c < b : c$

Contoh:

$$5x > 15$$

$$\frac{1}{5}.5x > \frac{1}{5}.15$$

$$x > 3$$

- Tanda pertidaksamaan berlawanan jika kedua ruas dikali atau dibagi dengan suatu bilangan negatif.

Jika $a > b$ dan $c < 0$ maka:

$a.c < b.c$

$a : c < b : c$

Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka:

$a.c < b.c$

$a : c < b : c$

Contoh:

$$-5x > 45$$
$$-\frac{1}{5} . -5x < -\frac{1}{5} . 45$$
$$x < -9$$

- Tanda pertidaksamaan tetap jika kedua ruas positifnya dikuadratkan.

Jika $a > b > 0$ maka $a^2 > b^2 > 0$

Contoh:

$$\sqrt{3} > 3$$
$$(\sqrt{3})^2 > 3^2$$
$$x > 9$$

- Tanda pertidaksamaan berlawanan jika kedua ruas negatifnya dikuadratkan.

Jika $a < b < 0$ maka $a^2 > b^2 > 0$

Contoh:

$$-5 < -3$$
$$(-5)^2 > (-3)^2$$
$$25 > 9$$

2. Pertidaksamaan Kuadrat

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan kuadrat, yaitu:

- Ubah bentuk pertidaksamaan sehingga

menjadi bentuk umum (ruas kanan menjadi nol).

- Tentukan nilai-nilai x pembuat nol.
- Tuangkan x pembuat nol tersebut pada garis bilangan.
- Selidiki tanda dari setiap intervalnya.

Contoh:

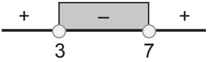
Himpunan penyelesaian dari

$x^2 - 10x + 21 < 0, x \leq R$ adalah ….

Jawab:

$x^2 - 10x + 21 < 0$

$(x - 3)(x - 7) < 0$



HP = $\{3 < x < 7\}$

3. Pertidaksamaan Bentuk Akar

Contoh:

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan:

$\sqrt{x - 4} < 3$

Jawab:

$\sqrt{x - 4} < 3$

Kuadratkan kedua ruas menjadi:

$x - 4 < 9$

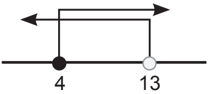
$x < 9 + 4$

$x < 13$ .... (i)

Syarat akar:

$x - 4 \geq 0$

$x \geq 4$ .... (ii)



Penyelesaian akhir adalah irisan dua penyelesaian di atas, yaitu: $4 \leq x < 13$.

4. Pertidaksamaan Pecahan

Langkah-langkah penyelesaian pertidaksamaan pecahan, yaitu:

- Cari nilai-nilai x pembuat nol bagian pembilang dan penyebut dari bentuk pecahan $\frac{f(x)}{g(x)}$, yaitu $f(x) = 0$ dan $g(x) = 0$.
- Gambarlah nilai-nilai x pembuat nol itu pada garis bilangan sehingga diperoleh interval-intervalnya.
- Tentukan tanda-tanda interval dengan cara mensubstitusikan nilai-nilai uji yang berada pada masing-masing interval.

Ingat, dalam menentukan interval, bagian penyebut tidak boleh sama dengan nol atau $g(x) \neq 0$.

Contoh:

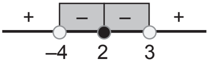
Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan:

$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 12} \leq 0$ adalah ….

Jawab:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 12} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)^2}{(x+4)(x-3)} \leq 0$$



HP = $\{-4 < x < 3\}$.

5. Pertidaksamaan Harga Mutlak

Sifat-sifat harga mutlak, yaitu:

- $|x| = \begin{cases} -x; \text{untuk } x < 0 \\ x; \text{untuk } x \geq 0 \end{cases}$
- Jika $|x| \leq a$ maka $-a \leq x \leq a$
- Jika $x > a$ maka $x < -a$ atau $x > a$

- Jika $|f(x)| \leq |g(x)|$ maka:

  $(f(x) + g(x)).(f(x) - g(x)) \leq 0$

Contoh:

Tentukan solusi pertidaksamaan $\left|\dfrac{x+3}{x-1}\right| < 1$!

Jawab:

$$\left|\frac{x+3}{x-1}\right| < 1$$

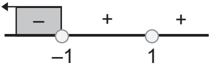
Kedua ruas dikuadratkan, didapat:

$$\frac{(x+3)^2}{(x-1)^2} - 1 < 0$$

$$\frac{\{x^2+6x+9\} - \{x^2-2x+1\}}{x^2-2x+1} < 0$$

$$\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 6x + 2x + 9 - 1}{x^2-2x+1} < 0$$

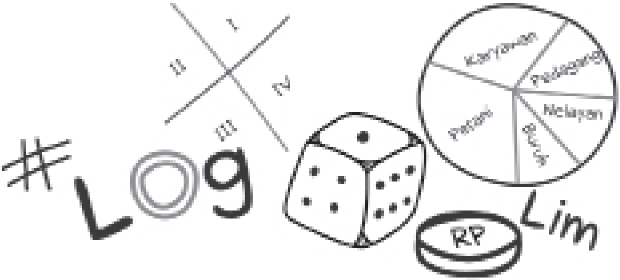
$$\frac{8x+8}{(x-1)^2} < 0$$



Jadi, HP = $\{x < -1\}$.

Bab 6

Trigonometri



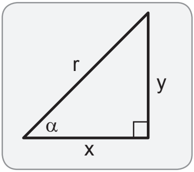
A. PENGERTIAN

Nilai perbandingan trigonometri dapat didefinisikan pada segitiga siku-siku.

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \cot an\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \rightarrow \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \rightarrow \cot an\alpha = \frac{x}{y}$$



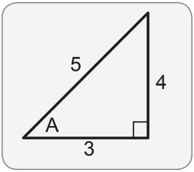
Cara mudah menghafal:

$\text{Sin} = \dfrac{\text{depan}}{\text{miring}}$ → **“sin de mir“**

$\text{Cos} = \dfrac{\text{samping}}{\text{miring}}$ → **“cos sa mir“**

$\text{Tan} = \dfrac{\text{depan}}{\text{samping}}$ → **“tan de sam“**

Contoh:



Diketahuisegitigaseperti gambar di samping! Tentukan nilai:
sin A, cos A, tan A, sec A, cosec A, dan cot A!

Jawab:

$$\text{Sin A} = \frac{4}{5} \qquad \text{Cos A} = \frac{3}{5} \qquad \text{Tan A} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Cosec A} = \frac{5}{4} \qquad \text{Sec A} = \frac{5}{3} \qquad \text{Cot A} = \frac{3}{4}$$

B. NILAI TRIGONOMETRI UNTUK SUDUT ISTIMEWA

	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin	0	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{b}{a}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mp$

Bentuk-bentuk trigonometri sudut berelasi:

	Kuadran I		**Kuadran II**	
	α	$90 - \alpha$	$90 + \alpha$	$180 - \alpha$
Sin	Sinα	Cosα	Cosα	Sinα
Cos	Cosα	Sinα	–Sinα	–Cosα
Tan	Tanα	Cotα	–Cotα	–Tanα

Kuadran III		Kuadran IV	
$180 + \alpha$	$270 - \alpha$	$270 + \alpha$	$360 - \alpha$
$-\text{Sin}\alpha$	$-\text{Cos}\alpha$	$-\text{Cos}\alpha$	$-\text{Sin}\alpha$
$-\text{Cos}\alpha$	$-\text{Sin}\alpha$	$\text{Sin}\alpha$	$\text{Cos}\alpha$
$\text{Tan}\alpha$	$\text{Cot}\alpha$	$-\text{Cot}\alpha$	$-\text{Tan}\alpha$

Contoh:

1. $\text{Sin } 120^o = \text{Sin } (90^0 + 30^o) = \text{Cos } 30^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   atau:

   $\text{Sin } 120^o = \text{Sin } (180^o - 60^o)$

   $= \text{Sin } 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. $\text{Cos } 240^o = \text{Cos } (270^o - 30^o)$

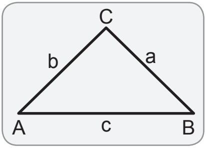
   $= -\text{Sin } 30^o = -\frac{b}{a}$

   atau:

   $\text{Cos } 240^o = \text{Cos } (180^o + 60^o)$

   $= -\text{Cos } 60^o = -\frac{b}{a}$

C. ATURAN TRIGONOMETRI PADA SEGITIGA



Aturan Sinus:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

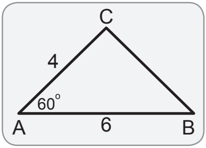
Aturan Cosinus:

$$a^2 - b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 - a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 - a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Luas Segitiga:

$$L = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$L = \frac{1}{2}ac\sin B$$
$$L = \frac{1}{2}bc\sin A$$

Contoh:



Berdasarkan gambar, tentukan:

a. Panjang BC!

b. Luas segitiga!

Jawab:

a. Untuk mencari panjang BC, gunakan aturan kosinus maka:

$BC^2 = 4^2 + 6^2 – 2.4.6.\text{Cos } 60^o$

$= 16 + 36 – 48. ½ = 52 – 24 = 28$

$BC = 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

b. Luas segitiga ABC:

$L = ½.AB.AC.\text{Sin } 60^o$

$= ½.4.6. ½. \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

D. RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

Identitas Trigonometri:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut:

$$\sin (A \mp B) = \sin A \cos B \mp \cos A \sin B$$

$$\cos (A \mp B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan (A \mp B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A.\tan B}$$

Rumus Sudut Rangkap:

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$
$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

Rumus Perkalian, Jumlah, dan Selisih:

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$
$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$
$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$
$$-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

E. PERSAMAAN TRIGONOMETRI

Persamaan Dasar:

- $\sin x = \sin p$
  $x = p + n.360^o$ atau
  $x = (180 - p) + n.360^o$
- $\cos x = \cos p$
  $x = \mp p + n.360^o$
- $\tan x = \tan p$
  $x = p + n.180^o$

Persamaan Berbentuk acos x + bsin x = c:

Persamaan acos x + bsin x = c tersebut bisa diselesaikan dengan syarat: $a^2 + b^2 \mp c^2$

Persamaan tersebut diselesaikan dengan mengubah bentuk acos x + bsin x = c menjadi k cos (x – a).
Dimana $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

Contoh:
Untuk $0 \leq x \leq 360^o$ Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a. $\sin 2x = ½$
b. $\cos 2x = -1$
c. $\tan 2x = 1$

Jawab:

$0 \leq 2x \leq 720^o$

a. $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = \sin 30^0$

$2x = 30^0 \rightarrow x = 15^o$

$2x = 150^o \rightarrow x = 75^o$

$2x = 510^o \rightarrow x = 255^o$

b. $\cos 2x = -1$

$\cos 2x = \cos 180^0$

$2x = 180^0 \rightarrow x = 90^o$

$2x = 540^o \rightarrow x = 270^o$

c. $\tan 2x = 1$

$\tan 2x = \tan 45^o$

$2x = 45^o \rightarrow x = 22{,}5^o$

$2x = 225^o \rightarrow x = 112{,}5^o$

$2x = 580^o \rightarrow x = 290^o$

F. FUNGSI TRIGONOMETRI

Bentuk umum:

$y = A \sin k(x \mp \alpha) + C$

$y = A \cos k(x \mp \alpha) + C$

$y = A \tan k(x \mp \alpha) + C$

Untuk fungsi:

$y = k \sin r(x \mp \theta) + C$

$y = k \cos r(x \mp \theta) + C$

Maka:

Periode $P = \dfrac{360^0}{|k|}$

Nilai maksimum: $y - |A| + C$

Nilai minimum: $y - -|A| + C$

Untuk fungsi:

$y = k \tan r(x \mp \theta) + C$

Maka:

Periode $P = \dfrac{180^0}{|k|}$

Contoh:

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $y = 3 \cos(2x + 5)$!

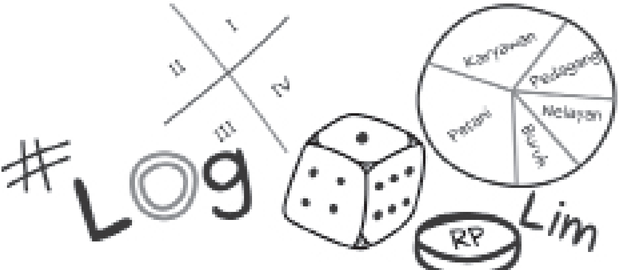
Jawab:

Nilai maksimum = 3.1 = 3

Nilai minimum = 3.(–1) = –3

Bab 7

Statistika



A. PENGERTIAN

Statistika adalah ilmu yang mempelajari bagaimana mengumpulkan, menyajikan, menganalisis, dan menyimpulkan data.

Adapun statistik adalah ukuran-ukuran atau besaran-besaran yang dibicarakan dalam statistika.

B. JENIS-JENIS UKURAN

Ada dua jenis ukuran dalam statistika:

a. Ukuran Pemusatan

Meliputi:

1. Mean (rata-rata):

- Data tunggal

  Rumus:

$$\text{rata-rata} = \frac{\text{Jumlah Data}}{\text{Banyak Data}}$$

- Data berkelompok

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

2. Median (nilai tengah)

- Untuk data tunggal dengan jumlah data ganjil.

$$\text{Median} = \text{data ke-}\frac{5+6}{2}$$

Contoh: ada 11 buah data:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$

$$\begin{aligned}\text{Median} &= \text{data ke-}\frac{11+1}{2}\\ &= \text{data ke-}6 = x_6\end{aligned}$$

- Untuk data tunggal dengan jumlah data genap.

$$\text{Median} = \text{data ke-}\frac{\frac{n}{2}+\frac{n+2}{2}}{2}$$

Contoh: ada 10 buah data:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$

$$\begin{aligned}\text{Median} &= \text{data ke-}\frac{\frac{10}{2}+\frac{10+2}{2}}{2}\\ &= \text{data ke-}\frac{\frac{10}{2}+\frac{10+2}{2}}{2}\\ &= \text{data ke-}\frac{5+6}{2}\end{aligned}$$

Jadi, median data di atas di antara data ke-5 dan 6.

- Untuk data berkelompok

$$Me = Tb_{Me} + \left(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_{Me}}{f_{Me}} \right).C$$

Keterangan:

Tb_{Me} = tepi bawah kelas median

$\sum f_{Me}$ = frekuensi kumulatif sebelum kelas median.

f_{Me} = frekuensi median.

C = panjang kelas.

3. **Modus**

Yaitu data yang paling banyak atau sering muncul (data dengan frekuensi terbesar).

- Data tunggal

Modus dapat ditentukan dengan mencari data yang frekuensinya paling banyak (paling sering muncul).

- Data berkelompok

$$Mo = Tb + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) . C$$

Keterangan:

M_o = modus

Tb = tepi bawah kelas modus.

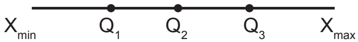
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya.

d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.

C = panjang kelas.

4. Kuartil

Yaitu suatu ukuran yang membagi sekelompok data menjadi empat bagian, yaitu:



Ada tiga jenis kuartil, yaitu kuartil bawah (Q_1), kuartil tengah/median (Q_2), dan kuartil atas (Q_3).

b. Ukuran Penyebaran

- **Jangkauan (J)**

Yaitu selisih data terbesar dengan data

terkecil.

$$J = X_{terbesar} - X_{terkecil}$$
$$= X_{maks} - X_{min}$$

- **Jangkauan antar-kuartil (JAQ)**

$$JAQ = Q_3 - Q_1$$

- **Simpangan kuartil (Q_d)**

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

- **Simpangan rata-rata (SR)**

$$SR = \frac{\sum f_i . |x_i - \overline{x}|}{\sum f_i}$$

- **Ragam/variansi (R)**

$$R = \frac{\sum f_i . |x_i - \overline{x}|^2}{\sum f_i}$$

- **Simpangan baku (SB)**

$$SB = \sqrt{\frac{\sum f_i . |x_i - \overline{x}|^2}{\sum f_i}}$$

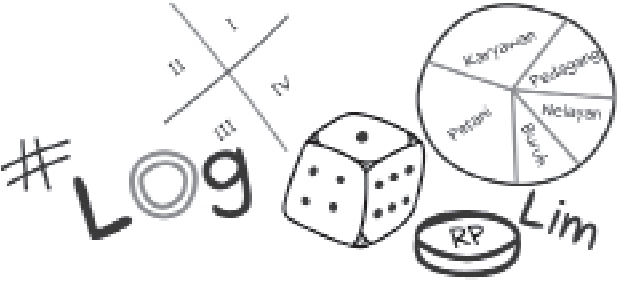
C. PERUBAHAN DATA

Aturan perubahan data berlaku:

- Apabila suatu data ditambah atau dikurangi *k* maka untuk ukuran pemusatan (mean, median, modus, kuartil) ikut ditambah atau dikurangi *k*.
- Apabila suatu data ditambah atau dikurangi *k* maka untuk ukuran penyebaran (jangkauan, simpangan rata-rata, ragam, simpangan baku) tetap (tidak berubah).
- Apabila suatu data dikali atau dibagi *k* maka untuk ukuran pemusatan (mean, median, modus, kuartil) maupun ukuran penyebaran (jangkauan, simpangan rata-rata, ragam, simpangan baku) ikut dikali atau dibagi *k*.

Bab 8#

Peluang



A. KAIDAH PENCACAHAN

a. Aturan Pengisian Tempat Yang Tersedia

Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan kejadian kedua dapat terjadi dalam n cara maka dua kejadian tersebut dapat terjadi bersama-sama dalam m x n cara.

b. Faktorial

Notasi: n! (dibaca n faktorial)

Rumus:

$$n! = n.\ (n - 1).\ (n - 2).\ (n - 4)\ ...\ 3.\ 2.\ 1$$

Contoh:

5! = 5. 4. 3. 2.1 = 120

7! = 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5.040

c. Permutasi

Permutasi adalah pencacahan yang mungkin dari elemen-elemen suatu himpunan dengan memerhatikan urutan.

Macam-macam permutasi:

1. Permutasi sekumpulan n elemen yang berlainan diambil secara bersama-sama.

   Rumus:

$$_nP_n = n!$$

Contoh:

Berapa susunan kata yang bisa dibuat dari kata “BISA”.

Jawab:

Dari 4 huruf tersebut, akan bisa disusun kata sebanyak:

${}_4P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ buah

2. Permutasi n elemen diambil dari r elemen sekaligus, dirumuskan:

$$ {}_nP_r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, 0 < r < n. $$

Contoh:

Dari 5 orang calon akan dipilih 3 orang sebagai ketua, sekretaris, dan bendahara. Tentukan banyak susunan yang mungkin!

Jawab:

$$ {}_5P_3 - \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1} = 60 $$

3. Permutasi n elemen dengan $n_1, n_2, \ldots, n_k$ elemen yang sama, bisa dirumuskan:

$$ P = \frac{n!}{n_1! n_2! .. n_k!} $$

Contoh:

Tentukan banyak kata yang bisa disusun dari kata "MATEMATIKA"!

Jawab:

n = 10

Elemen yang sama:

M = 2, A = 3, dan T = 2

Jadi, banyak susunan:

$$P = \frac{10!}{2!.3!.2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2!.\cancel{3!}.2!}$$

$$= 15.1200$$

4. Permutasi siklis, yaitu permutasi yang letak elemen-elemennya melingkar.

   Rumus:

$$\boxed{P = (n-1)!}$$

Contoh:

Empat orang duduk melingkar, ada berapa cara mereka duduk?

Jawab:

Diketahui: n = 4 maka:

P = (4 – 1)! = 3! = 3.2.1 = 6 cara.

d. Kombinasi

Kombinasi adalah suatu susunan dari unsur-unsur tanpa memerhatikan urutannya.

Rumus:

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!.(n-r)!} $$

Contoh:

Dari 5 orang akan dipilih 3 orang sebagai pengurus RT. Tentukan banyak susunan yang mungkin!

Jawab:

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 10 $$

B. PELUANG SUATU KEJADIAN

a. Kejadian dan Ruang Sampel

- Kejadian adalah himpunan bagian suatu ruang sampel S dari suatu percobaan.
- Ruang sampel (S) adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin dihasilkan oleh suatu percobaan.

b. Peluang

Jika K adalah suatu himpunan kejadian dimana K $\subset$ S (K himpunan bagian dari S) maka peluang kejadian K bisa dirumuskan:

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} \text{ dimana } 0 \leq P(K) \leq 1$$

Keterangan:

n(K) = banyak anggota dalam himpunan kejadian K.

n(S) = banyak anggota dalam himpunan kejadian S.

Contoh:

Sebuah dadu dilempar, berapa peluang munculnya mata dadu bilangan ganjil?

Jawab:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\rightarrow$ n(S) = 6

K = himpunan mata dadu ganjil

= {1, 3, 5} $\rightarrow$ n(K)=3

Jadi, peluang $P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c. Frekuensi Harapan

Jika percobaan dilakukan sebanyak n kali dengan peluang kejadian A adalah P(A) maka frekuensi harapan kejadian A adalah:

$$F_h(A) = n.P(A)$$

Keterangan:

$F_h(A)$ = frekuensi harapan kejadian A.
n = banyaknya percobaan.
P(A) = peluang kejadian A.

C. KEJADIAN MAJEMUK

a. Peluang Gabungan Dua Kejadian

Rumus:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Contoh:

Dari 30 siswa diketahui bahwa:
15 siswa menyukai bakso
20 siswa menyukai mi ayam.
10 siswa suka keduanya
Jika diambil satu siswa secara acak, tentukan peluang bahwa siswa yang terambil suka bakso atau mi ayam.

Jawab:

A = kejadian terpilih siswa suka bakso
B = kejadian terpilih siswa suka mi ayam

Maka:
A U B = kejadian terpilih siswa suka bakso atau mi ayam

$A \cap B$ = kejadian terpilih siswa suka bakso dan mi ayam

Jadi:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

$$= \frac{15}{30} + \frac{20}{30} - \frac{10}{30} - \frac{25}{30} - \frac{5}{6}$$

b. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Rumus:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Contoh:

Dua buah dadu dilempar bersamaan sebanyak 1 kali. Tentukan peluang kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu tersebut 5 atau 7!

Jawab:

S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (5, 6), (6, 6)}
→ n(S) = 36

Misalkan:

A = himpunan kejadian muncul jumlah mata dadu 5
= {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}

n(A) = 4

Maka, peluang $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

B = himpunan kejadian muncul jumlah mata dadu 7

= {(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3),(5, 2),(6, 1)}

n(B) = 6

Maka, peluang $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Jadi, peluang kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu tersebut 5 atau 7 adalah:

P(A U B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} = \frac{5}{18}$$

c. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Bebas

Rumus:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Contoh:

Terdapat 2 kotak, kotak I berisi 6 bola merah dan 4 bola biru. Kotak II berisi 3 bola merah dan 5 bola biru. Jika dari masing-masing kotak diambil satu bola, tentukan peluang terambil bola merah pada kotak I dan terambil bola biru pada kotak II!

Jawab:

Misalkan:

A = kejadian terambil bola merah dari kotak I.

Peluang $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{6+4} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

B = kejadian terambil bola biru dari kotak II.

Peluang $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{3+5} = \frac{5}{8}$

Jadi, peluang terambil bola merah pada kotak I dan bola biru pada kotak II adalah:

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{5}.\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

d. Peluang Komplemen suatu Kejadian

Jika diketahui kejadian A maka komplemen kejadian A dinotasikan dengan A^c dan peluang dari A^c ditulis $P(A^c)$ dan dirumuskan:

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A)}$$

e. Kejadian Bersyarat

Peluang munculnya kejadian A dengan syarat kejadian B muncul adalah:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{atau}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

Dimana $P(B) \neq 0$.

Keterangan:

$P(A | B)$ = peluang kejadian A setelah kejadian B.

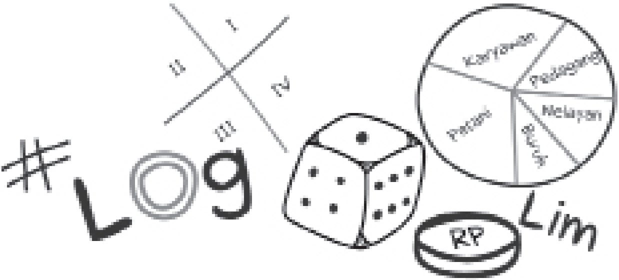
$P(A \cap B)$ = peluang kejadian A dan B

$P(A)$ = peluang kejadian A.

$P(B)$ = peluang kejadian B.

Bab 9#

Fungsi Komposisi dan Invers



A. FUNGSI KOMPOSISI

Komposisi fungsi adalah sebuah operasi yang memproses suatu fungsi lain secara berurutan sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru, yang hasilnya disebut fungsi komposisi. Fungsi komposisi dinotasikan sebagai berikut:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Contoh:

Diketahui $f(x) = x^2 + 3$ dan $g(x) = x + 2$

Tentukan:

$(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(2)$, dan $(g \circ f)(3)$!

Jawab:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(x + 2)\\ &= (x + 2)^2 + 3\\ &= x^2 + 4x + 4 + 3\\ &= x^2 + 4x + 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x^2 + 3)\\ &= (x^2 + 3) + 2 = x^2 + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) &= 2^2 + 4.2 + 7\\ &= 4 + 8 + 7 = 19\end{aligned}$$

$(g \circ f)(3) = 3^2 + 5$

$= 9 + 5 = 14$

B. FUNGSI INVERS

Misalkan, fungsi f: A → B maka invers fungsi f dinyatakan dengan f^{-1}: B → A.

Jika $y = f(x)$ maka $x = f^{-1}(y)$

TRIK:

Fungsi Awal	Fungsi Invers
$F(x) = ax + b$	$F^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$
$F(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$	$F^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$
$F(x) = a^{bx}$	$F^{-1}(x) = \frac{1}{b} \cdot {}^{a}\log x$
$F(x) = ax^2 + bx + c$	$F^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4ax + b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$ atau $F^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{4ax + b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$
$F(x) = {}^{a}\log cx$	$F^{-1}(x) = \frac{1}{c} a^x$

Sifat-sifat:

$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$

$(f \circ g)(x) = h(x) \quad \circ \quad f(x) = h\{g^{-1}(x)\}$

Contoh:

Tentukan invers fungsi dari:

1. $f(x) = x + 4$
2. $f(x) = x^2 - 3$

Jawab:

1. $f(x) = x + 4$

   Misal, $y = x + 4$

   $x = y - 4$

   Jadi, $f^{-1}(y) = y - 4$ atau $f^{-1}(x) = x - 4$

2. $f(x) = x^2 - 3$

   Misal, $y = x^2 - 3$

   $x^2 = y + 3$

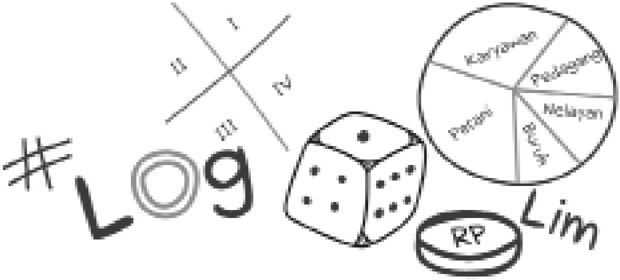
   $x = \sqrt{y+3}$

   Jadi, $f^{-1}(y) = \sqrt{y+3}$ atau

   $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$

Bab 10#

Limit Fungi



A. PENGERTIAN

Limit dari suatu fungsi x pada intinya adalah suatu nilai fungsi f(x) untuk mendekati harga tertentu.

Secara matematis ditulis:

$$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

L adalah nilai pendekatan f(x) untuk x di sekitar (mendekati) a.

B. LIMIT FUNGSI ALJABAR UNTUK X → a

Teorema limit antara lain adalah sebagai berikut:

1. $\lim_{x \to a} c = c$
2. $\lim_{x \to a} (bx + c) = ab + c$
3. $\lim_{x \to a} c.f(x) = c.\lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} \{f(x) \times g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \{f(x) \times g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$
6. Jika $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ dan $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ maka:

   $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(L)$

7. Jika $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L$ maka $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \frac{1}{L}$,

   syarat $L \infty 0$

8. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{2\sqrt{x^2 + 3} - 4\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{x^2 + 3} + 4\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2 + 3} + 4\sqrt{3}}$, syarat:

   $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

C. LANGKAH PENYELESAIAN SOAL LIMIT FUNGSI ALJABAR

a. Substitusi x ke f(x)

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Bila hasilnya: $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ maka lanjutkan ke langkah b.

Bila hasilnya tertentu, itulah harga limitnya (selesai).

Contoh:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x - 4}$ = ...

Jawab:

Substitusikan nilai x = 3 ke soal.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{3^2-9}{3^2-5.3+6}=\frac{0}{0}$$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x-1}=....$

Jawab:

Substitusikan nilai x = 2 ke soal.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x-1}=\frac{1^3+1}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x-1}=....$

Jawab:

Substitusikan nilai x = 1 ke soal.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x-1}=\frac{1^3+1}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

b. Jika Hasilnya $\frac{0}{0}$

Jika hasilnya $\frac{0}{0}$ maka gunakan metode faktorisasi atau bisa juga menggunakan **Dalil**

L'Hospital, yang didefinisikan:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Contoh:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = ...$$

Jawab:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^2 - 9}{3^2 - 5.3 + 6} = \frac{0}{0}$$

Maka:

Cara I: Faktrorisasi

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = \frac{3+3}{3-2} = 6$$

Cara II: L'Hospital

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{2x - 5}$$

$$= \frac{2.3}{2.3 - 5} = \frac{6}{6 - 5} = 6$$

c. Jika Hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$

Jika hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$ maka gunakan cara:

- Bagi pembilang dan penyebut oleh x berpangkat tertinggi.
- Bisa juga digunakan cara cepat sebagai berikut:

$$\lim_{x \to \infty} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + ...}{px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + ...} = L$$

Ada tiga kemungkinan hasil L, yaitu:

$$L = \begin{cases} \frac{a}{p}, \text{untuk } m = n \\ \infty, \text{untuk } m > n \\ 0, \text{untuk } m < n \end{cases}$$

Contoh:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2} = ...$$

Jawab:

Substitusikan x = ∞ ke soal ternyata hasilnya $\frac{\infty}{\infty}$.

Cara I: bagi dengan x pangkat tertinggi.

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{4 - 0 + 0}{3 + 0} = \frac{4}{3}$$

Cara II: Cara Cepat

Karena pangkat tertingginya sama maka cukup lihat koefisien pangkat tertinggi, dan abaikan koefisian lain yang pangkatnya lebih rendah.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 2} = \frac{4}{3}$$

c. Jika Hasilnya $\infty - \infty$

Jika hasilnya $\infty - \infty$ maka gunakan rumus:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$$

Ada tiga kemungkinan hasil, yaitu:

- Jika a > p maka hasilnya $-\infty$
- Jika a = p maka hasilnya $\frac{(b - q)}{2\sqrt{a}}$
- Jika a = p maka hasilnya $-\infty$

D. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Rumus limit fungsi trigonometri adalah:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$

E. BEBERAPA CONTOH LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{ax}=\frac{b}{a}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{ax}=\frac{b}{a}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{ax}=\frac{b}{a}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan bx}{ax}=\frac{b}{a}$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

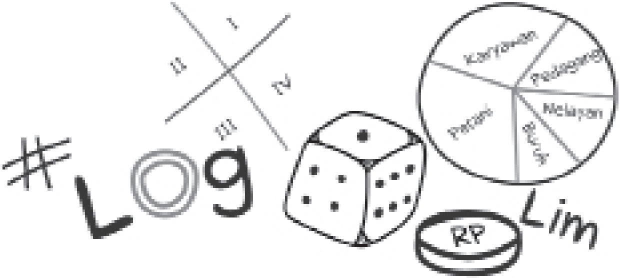
8. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

Jika terdapat fungsi cos maka diubah dulu menjadi:

- Cos x menjadi $1 - 2.\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} x$
- $\mathrm{Cos}^2 x$ menjadi $1 - \mathrm{Sin}^2\ x$

Bab 11

Turunan Fungsi (Differensial)



A. PENGERTIAN

Jika y = f(x) merupakan fungsi dari x maka turunan dari y tehadap x adalah:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

B. RUMUS-RUMUS TURUNAN FUNGSI

a. Aljabar

$f(x) = c \neq f'(x) = 0$

$f(x) = x^n \neq f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = a.x^n \neq f'(x) = a.nx^{n-1}$

b. Trigonometri

$f(x) = \sin x \neq f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \neq f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \neq f'(x) = \sec^2 x$

$f(x) = \cot x \neq f'(x) = -\text{cosec}^2 x$

c. Turunan Berantai

Misalkan, u dan v suatu fungsi dalam x dan y maka:

$y = u.v \quad \neq \quad y' = u'v + uv'$

$y = \dfrac{u}{v} \quad \neq \quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$y = \sin u \quad \neq \quad y' = u' \cos u$

$y = \cos u \quad \neq \quad y' = -u' \sin u$

$y = \tan u \quad \neq \quad y' = u' \cos u$

Dalil rantai:

$y = f(u)$, $u = f(t)$, dan $t = f(x)$

maka:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dt} . \frac{dt}{dx}$$

Contoh:

1. Diketahui $f(x) = x^6 + 12x^4 + 2x^2 - 6x + 8$
   Dan $f'(x)$ adalah turunan pertama dari $f(x)$. Nilai $f'(1) = \ldots$

   Jawab:

   $f(x) = x^6 + 12x^4 + 2x^2 - 6x + 8$

   $f'(x) = 6x^5 + 48x^3 + 4x - 6$

   $f'(1) = 6.1^5 + 48.1^3 + 4.1 - 6$

   $= 6 + 48 + 4 - 6$

   $= 52$

2. Turunan pertama dari fungsi

   $f(x) = (x - 1)^2 (x + 1)$ adalah $f'(x) = \ldots$

   Jawab:

   Misalkan:
   $u = (x - 1)^2 \neq u' = 2(x - 1)$
   $v = (x + 1) \neq v' = 1$

   Maka:
   $y = u.v$
   $y' = u'.v + uv'$
   $= 2(x - 1).(x + 1) + (x - 1)^2.1$
   $= 2x^2 - 2 + x^2 - 2x + 1$
   $= 3x^2 - 2x - 1$

3. Turunan pertama dari $y = \cos^4 x$ adalah …

   Jawab:

   $y = \cos^4 x$
   $y' = 4\cos^3 x.(-\sin x)$
   $= -4\cos^3 x .\sin x$

C. APLIKASI TURUNAN

a. Menentukan Persamaan Garis singgung Kurva

- Tentukan gradien garis singgung

$y = f(x)$ di titik (x_1, y_1) dengan rumus: $m = f'(x_1)$.

- Tentukan persamaan garis dengan rumus:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

b. Menentukan Titik Stasioner, Fungsi Naik/ Turun, Nilai Balik Maksimum/Minimum, dan Titik Belok:

- Fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$
- Fungsi akan turun jika $f'(x) < 0$.
- Fungsi mencapai stasioner jika $f'(Xe) = 0$.
- Nilai balik maksimum terjadi jika $f'(Xe) = 0$ dan $f''(Xe) < 0$
- Nilai balik minimum terjadi jika $f'(Xe) = 0$ dan $f''Xe) > 0$
- Titik belok terjadi pada saat $f''Xe) = 0$

Contoh:

1. Grafik fungsi $y = x^4 - 8x^2 - 9$ turun untuk nilai x …

   Jawab:

   $y = x^4 - 8x^2 - 9$

Turunkan kurva dan sama dengankan nol.

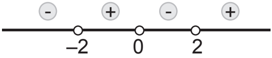
$y' = 4x^3 - 16x$

$0 = x^3 - 4x$

$0 = x(x^2 - 4)$

$0 = x(x + 2)(x - 2)$

$x = 0$, $x = -2$, dan $x = 2$



Berdasarkan garis bilangan terlihat bahwa kurva turun (bertanda –) terjadi pada interval $x < -2$ atau $0 < x < 2$.

2. Titik belok dari fungsi $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ adalah …

Jawab:

Turunkan dua kali dan sama dengankan nol:

$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$

$y' = 3x^2 + 12x + 9$

$y'' = 6x + 12$

$0 = 6x + 12 \rightarrow 6x = -12 \rightarrow x = -2$

Substitusi $x = -2$ ke persamaan kurva awal:

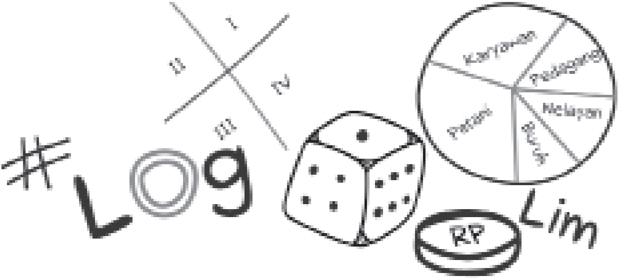
$y = (-2)^3 + 6(-2)^2 + 9(-2) + 7$

$\quad = -8 + 24 - 18 + 7 = 5$

Jadi, titik beloknya adalah $(-2, 5)$.

Bab 12#

Program Linear



A. PENGERTIAN

Program linier adalah metode matematika untuk menyelesaiakan suatu masalah dengan tujuan memperoleh hasil yang optimum (maksimum atau minimum).

- Masalah tersebut disajikan dalam bentuk model matematika pembatasan (kendala/ syarat*/constrain).*
- Hasil yang optimum ditentukan dengan terlebih dahulu membuat model matematika sasaran program berupa sebuah fungsi linier yang disebut fungsi sasaran (objekif).

B. MENGGAMBAR DAERAH PENYELESAIAN

Daerah penyelesaian (arsiran):

$Ax + By \geq C$ atau $Ax + By \leq C$

Dapat ditentukan dengan cara:

Pertidaksamaan: Ax + By (Tanda) C		
Nilai A	**Tanda**	**Daerah Arsiran**
Positif (+)	> atau ≥ < atau ≤	Kanan garis Kiri garis

Negatif (–)	> atau ≥ < atau ≤	Kiri garis Kanan garis

Contoh:

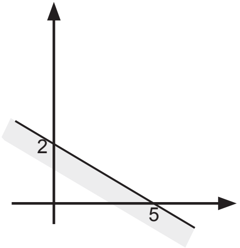
Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x + 5y \leq 10$!

Jawab:

$2x + 5y \leq 10$

x	y	
0	2	→ (0, 2)
5	0	→ (5, 0)

Titik potong garis terhadap sumbu x adalah (0, 2) dan (5, 0).



Karena tanda pertidaksamaan adalah kurang dari atau sama dengan (≤) maka daerah penyelesaian ada di sebelah kiri garis $2x + 5y \leq 10$ (daerah yang diarsir).

C. MENENTUKAN NILAI MAKSIMUM ATAU MINIMUM DARI FUNGSI SASARAN (OBJEKTIF)

- Tentukan titik-titik ujung pembatas daerah penyelesaian (titik-titik penyelesaian).
- Substitusikan titik-titik penyelesaian ke fungsi sasaran.
- Nilai terbesar adalah nilai maksimum fungsi sasaran.
- Nilai terkecil adalah nilai minimum fungsi sasaran.

Contoh:

Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg, sedangkan kelas ekonomi 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1.440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000 dan kelas ekonomi Rp100.000. Tentukan pendapatan maksimum pesawat!

Jawab:

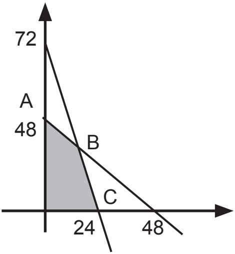
Menentukan model matematika:

	Bagasi (kg)	Tiket (Rp)
Utama (x)	60	150.000
Ekonomi (y)	20	100.000
48	**1.440**	

Pertidaksamaan yang memenuhi adalah:

$x + y \leq 48$ ...... (1)
$60x + 20y \leq 1.440$
$3x + y \leq 72$ ..... (2)
$x \geq 0$ dan $y \geq 0$ ..... (3)

Fungsi tujuan:
$f(x,y) = 150.000x + 100.000y$



Titik B dicari dengan eliminasi.

$$\begin{array}{r} 3x + y = 72 \\ x + y = 48 \\ \hline 2x = 12 \end{array} - \rightarrow x = 6 \text{ dan } y = 36$$

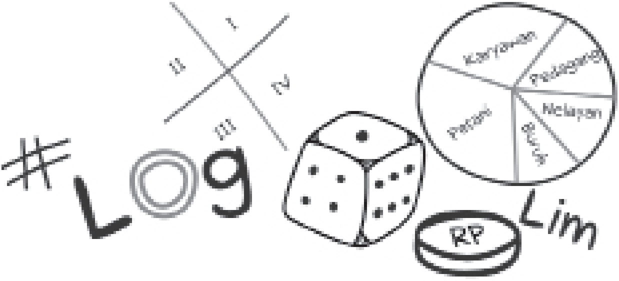
Diperoleh titik B(12, 36).

Titik	f(x,y) = 150.000x + 100.000y
A(0, 48)	4.800.000
B(12, 36)	**5.400.000 (Maks)**
C(24, 0)	3.600.000

Jadi, pendapatan maksimum pesawat adalah Rp5.400.000 yang terjadi pada saat penumpang kelas utama sebanyak 12 orang dan penumpang kelas ekonomi 36 orang.

Bab 13#

Matriks



A. PENGERTIAN

- Matriks adalah susunan bilangan yang ditata dalam baris dan kolom.
- Ordo matriks adalah ukuran matriks (jumlah baris x jumlah kolom).

Contoh:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{kolom 1} & \text{kolom 2} & \text{kolom 3} \end{array} & \end{array}$$

Matriks di atas mempunyai ordo 2 x 3.

- Dua buah matriks disebut sama, jika mempunyai ordo sama dan elemen/entri yang seletak bernilai sama.
- Transpose matriks, yaitu mengubah baris jadi kolom, kolom jadi baris.

Contoh: jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ maka

transpose matriks A ditulis $A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$.

B. OPERASI MATRIKS

a. Penjumlahan dan Pengurangan

Langkah-langkah:

- Matriks yang akan dikurang atau dijumlah harus memiliki ordo yang sama.
- Jumlahkan/kurangkan elemen yang seletak.

Contoh:

Jika $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \\ -1 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

maka:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+5 & -1+(-3) \\ -5+4 & 2+1 & -5+(-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \\ -1 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

b. Perkalian

- Perkalian antara konstanta dengan matriks, yaitu kalikan semua elemen matriks dengan konstanta tersebut.

$$k \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

- Perkalian matriks dengan matriks, yaitu kalikan baris dengan kolom.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e & f \\ g & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bg \\ ce + dg & cf + dg \end{pmatrix}$$

c. Determinan

Misalkan, A = $\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka determinan matriks A dinotasikan det(A) atau $|A|$ atau $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ dan dirumuskan:

$$|A| - ad - bc$$

d. Invers Matriks

Misalkan: A = $\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka invers matriks A dinotasikan A^{-1} dan dirumuskan:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Syarat matriks mempunyai invers $|A| \rightarrow 0$ atau disebut matriks non-singular.

C. SIFAT-SIFAT

- $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$
- $A.I = I.A = A$
- $\left|A^T\right| = |A|$
- $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$
- $|A.B| = |A|.|B|$
- Jika AB = C maka:

  $A = CB^{-1}$ dan $B = A^{-1}C$
- Jika AB = C maka:

  $|AB| = |C| \rightarrow |A|.|B| = |C|$

Contoh:

1. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka

   $(A + B)(A - B) - (A - B)(A + B) = ...$

   Jawab:

   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka:

   $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Maka:

$= (A + B)(A - B) - (A - B)(A + B)$

$$= \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan matriks C memenuhi AC = B maka det C = …

Jawab:

Jika AC = B maka $C = A^{-1}B$

$C = A^{-1}B$

$$= \frac{1}{3-2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka:

det (C) = 10.2 – (–3).(–3)

= 20 – 9 = 11

Trik:

Jika AC = B maka sesuai sifat determinan, berlaku:

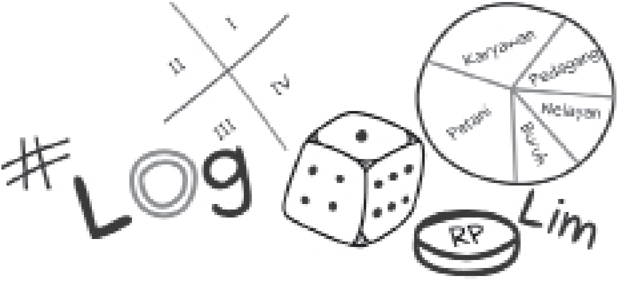
$$|AC| = |B|$$

$$|A|\,|C| = |B|$$

$$|C| = \frac{|B|}{|A|} = \frac{12-1}{3-2} = 11$$

Bab 14#

Baris dan Deret



A. PENGERTIAN

1. Barisan adalah rangkaian bilangan yang disusun dengan aturan (pola) tertentu.
   Bentuk umum:
   $$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots, u_n$$
2. Deret adalah jumlah dari barisan tersebut.
   Bentuk umum:
   $$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n$$

B. BARISAN DAN DERET ARITMETIKA

a. Barisan Aritmetika

Bentuk umum:

$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots, u_n$

$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots.\ a + (n – 1)b$

Rumus:

- Beda → $b = u_n – u_{n-1}$
- Suku ke-n barisan aritmetika:

$$\boxed{U_n = a + (n - 1)b}$$

Keterangan:

U_n = Suku ke-n

a = u_1 = suku pertama

b = beda (selisih)

b. Deret Aritmetika

Bentuk umum:

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n$

$\quad = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots. + a + (n - 1)b$

Rumus:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$
$$= \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Hubungan antara U_n dan S_n adalah:

$U_n = S_n - S_{n-1}$

Keterangan: S_n = jumlah suku ke-n.

c. Suku Tengah Aritmetika

Suku tengah berlaku untuk banyak suku (n) yang ganjil.

Rumus suku tengah aritmetika:

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

Hubungan antara U_t dan S_n adalah:

$\boxed{S_n = nU_t}$ atau $\boxed{U_t = \frac{S_n}{n}}$

Contoh:

Diketahui barisan 3, 7, 11, 15, …

Tentukan:

a. Beda
b. Suku ke-20
c. Jumlah 20 suku pertama
d. Untuk n = 21 tentukan suku tengah

Jawab:

a. Beda:

$b = 7 - 3 = 11 - 7 = 4$

b. $U_{20} = a + 19b$

$= 3 + 19.4 = 3 + 76 = 79$

c. $S_{20} = 20/2\ (a + U_{20})$

$= 10\ (3 + 79) = 10.\ 82 = 820$

atau

$S_{20} = 20/2\ (2a + 19b)$

$= 10(2.3 + 19.4)$

$= 10(6 + 76) = 10(82) = 820$

d. Untuk n = 21

Cari dahulu suku ke-21 maka:

$U_{21} = a + 20b$

$= 3 + 20.4$

$= 3 + 80 = 83$

Suku tengah:

$U_t = ½\ (a + U_{21})$

$= ½\ (3 + 83) = ½\ (86) = 43$

C. BARISAN DAN DERET GEOMETRI

a. Barisan Geometri

Ciri-ciri barisan geometri adalah antar-sukunya memiliki rasio (pembanding) yang selalu sama.

Contoh:

3, 6, 12, 24, …. → $r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$

4, 2, 1, ½, ¼, …→ $r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Bentuk umum:

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots\ldots, u_n$$

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots, ar^{n-1}$$

Rumus:

Rasio: $\boxed{r = \frac{U_n}{U_{n-1}}}$

Suku ke-n: $\boxed{U_n = ar^{n-1}}$

b. Deret Geometri

Bentuk umum:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots + u_n$$

$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

Rumus jumlah n suku pertama geometri:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ jika } r > 1$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ jika } r < 1$$

Hubungan antara U_n dan S_n

$U_n = S_n - S_{n-1}$

c. Suku Tengah Geometri

Rumus:

$$(U_t)^2 = a.U_n$$

d. Deret Geometri Tak Berhingga

Yaitu suatu deret yang tidak mempunyai batas akhir (n tidak berhingga).

Deret geometri tak hingga akan memiliki limit jumlah dengan syarat rasio: $|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$.

Contoh:

$4 + 2 + 1 + ½ + ¼ +.. \quad \rightarrow r = ½$

$16 + 4 + 1 + ¼ + …. \quad \rightarrow r = ¼$

Deret geometri tak berhingga dikatakan konvergen jika $-1 < r < 1$. Rumus jumlah deret geometri tak hingga:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Contoh:

1. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga:

$$8 - \frac{8}{3} + \frac{8}{9} - \frac{8}{27} + ...$$

Jawab:

$$a = 8 \rightarrow r = \frac{-8/3}{8} = -\frac{1}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{8}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{8}{\frac{4}{3}} = 8 \times \frac{3}{4} = 6$$

2. Suku ke-2 dan ke-5 deret geometri berturut-turut adalah 24 dan 192. Jumlah 8 suku pertama deret tersebut adalah ....

Jawab:

U_2 = ar

24 = ar ..... (1)

U_5 = ar^4

$192 = ar^4$ ...... (2)

U_5 dibagi U_2 diperoleh:

$$\frac{U_5}{U_2} = \frac{ar^4}{ar}$$

$$\frac{192}{24} = r^3 \rightarrow r = 2$$

Substitusikan r = 2 ke salah satu persamaan maka:

$U_2 = ar$

$24 = a.2$

$a = 12$

Jadi, jumlah 8 suku pertama:

$$S_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{12(2^8 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 3.060$$