TIM MEDIA EDUKA

LTMPT
Lembaga Tes Masuk Perguruan Tinggi

MODUL SAKTI UTBK SBMPTN

MATEMATIKA SAINTEK

RINGKASAN SUPERLENGKAP
FULL RUMUS SAKTI
HAFALAN SUPERCEPAT

MATEMATIKA SAINTEK

Bab 1

Eksponen dan Logaritma

A. Pengertian Eksponen

Bilangan bereksponen (berpangkat) dinyatakan dengan:

$$\underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{\text{n kali}} = a^n$$

Contoh: 2 x 2 x 2 = 2^3 = 8

Notasi: a^n dibaca "a pangkat n"

- a disebut bilangan pokok (basis)
- n disebut bilangan pangkat

B. Sifat-Sifat Eksponen

Untuk a, b, m, dan n anggota bilangan real berlaku sifat:

1. $a^m . a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$
3. $1 : a^n = a^{-n}$
4. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
5. $a^0 = 1$; $a \neq 0$
6. $a^n . b^n = (ab)^n$
7. $a^m : b^m = (a : b)^m$
8. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

C. Persamaan Eksponen

- Bentuk : $a^{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = 0$
- Bentuk : $a^{f(x)} = a^p \Rightarrow f(x) = p$
- Bentuk : $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$
- Bentuk : $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$
- Bentuk : $a^{2f(x)+b} + a^{f(x)+c} + d = 0$
  $a^{2f(x)}.a^b + a^{f(x)}.a^c + d = 0$

D. Pertidaksamaan Eksponen

1. Untuk 0 < a < 1 maka berlaku:
   $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$
   $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$
2. Untuk a > 1 maka berlaku:
   $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$
   $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

E. Pengertian Logaritma

Logaritma adalah invers dari perpangkatan, yaitu mencari pangkat dari suatu bilangan pokok sehingga hasilnya sesuai dengan yang telah diketahui.

Jika $a^n = b$ maka ${}^a\log b = n$
dibaca "n = log b dengan basis a"

- a disebut basis (bilangan pokok), a > 0 dan $a \neq 1$
- b disebut bilangan yang dilogaritmakan, b > 0

F. Sifat-Sifat Logaritma

1. log 1 = 0
2. log 10 = 1
3. ${}^a\log b.c = {}^a\log b + {}^a\log c$
4. ${}^a\log \frac{b}{c} = {}^a\log b - {}^a\log c$
5. ${}^a\log b^n = n \,.\, {}^a\log b$
6. ${}^a\log a = 1$

7. ${}^{a}\log b = \dfrac{1}{{}^{b}\log a} = \dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a}$

8. ${}^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log d = {}^{a}\log d$

9. ${}^{a^m}\log b^n = {}^{a}\log b^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\,{}^{a}\log b$

10. $a^{{}^{a}\log b} = b^{{}^{a}\log a} = b$

G. Persamaan Logaritma

- Bentuk : ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$ atau ${}^{a}\log f(x) = c$
  Solusi : $f(x) = p$ atau $f(x) = a^c$
- Bentuk : ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log p$ atau ${}^{g(x)}\log f(x) = c$
  Solusi : $f(x) = p = 1$ atau $f(x) = g(x)^c$
- Bentuk : $a\,({}^{p}\log x)^2 + b\,{}^{p}\log x + c = 0$
  Solusi : Gunakan sifat persamaan kuadrat atau dengan **cara singkat,** yaitu:

  $$\boxed{x_1 . x_2 = p^{-\frac{b}{a}}}$$

- Bentuk : $a^{f(x)} = b^{g(x)}$
  Solusi : Kedua ruas dilogaritmakan menjadi:

  $$\boxed{f(x) \log a = g(x) \log b}$$

H. Pertidaksamaan Logaritma

1. Untuk bilangan pokok a > 1 berlaku:
   - Jika ${}^{a}\log f(x) \le {}^{a}\log g(x)$ maka:

     $$\boxed{f(x) \ge g(x)}$$

   - Jika ${}^{a}\log f(x) \le {}^{a}\log g(x)$ maka:

     $$\boxed{f(x) \le g(x)}$$

2. Untuk bilangan pokok 0 < a < 1, berlaku:
   - Jika ${}^{a}\log f(x) \le {}^{a}\log g(x)$ maka:

     $$\boxed{f(x) \le g(x)}$$

   - Jika ${}^{a}\log f(x) \le {}^{a}\log g(x)$ maka:

     $$\boxed{f(x) \ge g(x)}$$

   Syarat: $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$.

Bab 2

Persamaan Kuadrat

A. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$
$ay^2 + by + c = 0$
untuk a, b, c $\in$ bilangan real
x, y variabel dan $a \neq 0$

Rumus diskriminan:

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

B. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka akar-akar tersebut dapat diperoleh dengan cara:

a. Faktorisasi

$$\boxed{a(x - x_1).(x - x_2) = 0}$$

Contoh:

$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 3)(x - 2) = 0$
Maka x = 3 atau x = 2

b. Melengkapi Kuadrat Sempurna

$x^2 + bx + c = 0$ di mana a = 1 maka:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Contoh:

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$$\left(x + \frac{6}{2}\right)^2 = -8 + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$(x + 3) = \pm\sqrt{-8 + 9}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{1}$$

$x_1 = -2$ atau $x_2 = -4$

c. Rumus Al-Khawarizmi (abc)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

C. Bentuk Simetri Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka berlaku:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
- $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
- $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$
- $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$
- $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2\left(x_1 \cdot x_2\right)^2$
- $x_1^4 - x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)$

- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$
- $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1 \cdot x_2 (x_1 - x_2)$

D. Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat

Berdasarkan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, akar-akar terbagi menjadi dua jenis, yaitu:

a. Jika $D \geq 0$ maka akar-akarnya real
   - Jika $D > 0$, akarnya real berlainan
   - Jika $D = 0$, akarnya real kembar

b. Jika $D < 0$, akar-akarnya tidak real
   Jika akar-akarnya real maka hubungan akar-akar x_1 dan x_2 mempunyai syarat-syarat, yaitu:
   - Akar-akarnya real positif:
     $D \geq 0, x_1 + x_2 > 0, x_1.x_2 > 0$
   - Akar-akarnya real negatif:
     $D > 0,\ x_1 + x_2 = 0,\ x_1.x_2 < 0$
   - Akar-akarnya berlawanan tanda:
     $D > 0,\ x_1.x_2 = 1$
   - Akar-akarnya berlawanan:
     $D > 0,\ x_1 + x_2 = 0,\ x_1.x_2 < 0$
   - Akar-akarnya saling berkebalikan:
     $D > 0,\ x_1.x_2 = 1$

E. Menyusun Persamaan Kudrat Baru

$$(x - a)(x - b) = 0$$

atau

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1.x_2) = 0$$
$$x^2 - (JAA)x + (PAA) = 0$$

a dan b adalah akar-akar persamaan kuadrat
JAA = Jumlah akar-akar (a + b)
PAA = Perkalian akar-akar (a.b)

Contoh:

Jika akar-akarnya adalah kebalikan dari akar-akar yang diketahui maka:
$ax^2 + bx + c = 0$ menjadi $cx^2 + bx + a = 0$

Bab 3

Bentuk Akar

A. Sifat-Sifat Bentuk Akar

a. Bentuk Umum Akar

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\quad\quad$ $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ $\quad\quad$ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

b. Penjumlahan dan Pengurangan

1. $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
2. $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$

c. Perkalian dan Pembagian

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
3. $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

B. Merasionalkan Penyebut

- $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$
- $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$
  $= \dfrac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$
- $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$

C. Persamaan Bentuk Akar

- $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, syarat: $a > b > 0$

Bukti:

$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$

$= \sqrt{a+2\sqrt{ab}+b}$

$= \sqrt{a+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b}$

$= \sqrt{(\sqrt{a^2})+\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+(\sqrt{b^2})}$

$= \sqrt{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$= \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

- $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, syarat: $a > b > 0$

Bukti:

$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}$

$= \sqrt{a-2\sqrt{ab}+b}$

$= \sqrt{a-\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+b}$

$= \sqrt{(\sqrt{a^2})-\sqrt{ab}-\sqrt{ab}+(\sqrt{b^2})}$

$= \sqrt{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$= \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$= \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

Bab 4

Fungsi Kuadrat

A. Definisi Fungsi Kuadrat

Fungsi f yang didefinisikan sebagai $f(x) = ax^2 + bx + c$, di mana $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$ disebut sebagai fungsi kuadrat.

B. Bentuk Umum Fungsi Kuadrat

❒ Bentuk umum fungsi kuadrat adalah sebagai berikut:

$$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Dengan $a, b, c \in$ real dan $a \neq 0$.

- $x \in R$ disebut Domain (daerah asal)
- $y = f(x) \in R$ disebut Range (daerah hasil).
- Range $\in$ disebut kodomain (daerah kawan) yang berpasangan dengan Domain.

❒ Diskriminan (D) adalah nilai konstanta yang besarnya:

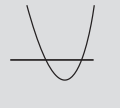
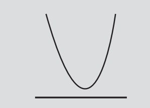
$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

C. Sifat-Sifat Kurva Fungsi Kuadrat

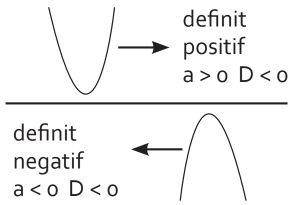
Bentuk kurva fungsi kuadrat adalah parabola sehingga sering disebut fungsi parabola, yaitu:

$$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Gambar kurva parabola:

Nilai	**D > 0 (2 titik potong)**	**D = 0 (menyinggung)**	**D < 0 (tidak memotong)**
a > 0 (terbuka ke atas)			
a < 0 (terbuka ke bawah)			

- Suatu kurva disebut **definit positif** (selalu bernilai positif untuk setiap x), jika $a > 0$ dan $D < 0$.
- Suatu kurva disebut **definit negatif** (selalu bernilai negatif untuk setiap x), jika $a < 0$ dan $D < 0$.



Jika (X_e, Y_e) adalah koordinat titik ekstrem maka:

- $X_e = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

  Titik X_e disebut sumbu simetri.

- $Y_e = -\dfrac{D}{4a} = ax_e^2 + bx_e + c$

  Titik Y_e disebut nilai ekstrem.

D. Persamaan Fungsi Kuadrat

Menentukan fungsi kuadrat dapat menggunakan tiga cara, yaitu:

1. Jika diketahui tiga titik sembarang maka:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

2. Jika diketahui titik potong dengan sumbu x di $(x_1,0)$, $(x_2,0)$, dan sebuah titik sembarang maka:

$$\boxed{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

3. Jika diketahui titik puncak (x_e,y_e) dan sebuah titik sembarang maka:

$$\boxed{y = a(x - x_e)^2 + y_e}$$

E. Hubungan Garis Dan Parabola

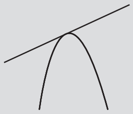
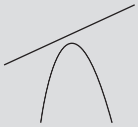
- Persamaan garis lurus adalah $y = mx + n$, sedangkan persamaan fungsi parabola adalah $y = f(x) = px^2 + qx + r$.
- Untuk menentukan hubungan kedua fungsi tersebut maka kedua persamaan disubstitusikan sebagai berikut:

$$y_{parabola} = y_{garis}$$

$$px^2 + qx + r = mx + n$$

$$px^2 + (q - m)x + (r - n) = 0$$

Dari hasil substitusi tersebut diperoleh:
$a = p$, $b = q - m$, dan $c = r - n$

Gambar	Keterangan
	$D > 0 \Rightarrow$ parabola memotong garis di dua titik.
	$D = 0 \Rightarrow$ parabola memotong garis di 1 titik (menyinggung garis).
	$D < 0 \Rightarrow$ parabola tidak memotong garis.

Bab 5

Pertidaksamaan

A. Sifat-Sifat Pertidaksamaan

1. Pemindahan suku tanda tetap.

   Contoh: $a + b > c$ maka $a + b - c > 0$

2. Perkalian atau pembagian dengan bilangan negatif tanda berubah.

   Contoh: $\frac{a > c}{-1}$ maka $-a < -c$

3. Pemangkatan genap mempunyai syarat kedua ruas sama nilainya.
   - Jika kedua ruas positif tanda tetap
   - Jika kedua ruas negatif tanda berubah

   Contoh:
   $3 \geq 1$ → jika keduanya dikuadratkan $3^2 \geq 1$ menjadi $9 \geq 1$ (*tanda tetap)*
   $-3 \leq -1$ → jika keduanya dikuadratkan akan menjadi $9 \geq 1$ *(tanda berubah dari ≤ menjadi ≥).*

4. Operasi dua pertidaksamaan
   Operasi penjumlahan tanda pertidaksamaan tetap.

   Contoh:

$$\begin{array}{r} a < b \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array} \; +$$

   Operasi perkalian atau pembagian mengikuti rumus:

(+) x (+) = +	(–) x (–) = +
(+) x (–) = –	(–) x (+) = –

B. Bentuk-Bentuk Pertidaksamaan

a. Pertidaksamaan Linear

$$\begin{aligned} ax - b &> 0 \\ ax &> b \\ x &> \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} 2x - 6 &> 0 \\ 2x &> 6 \\ x &> \frac{6}{2} \end{aligned}$$

b. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk umum:

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0}$$

Langkah-langkah umum penyelesaian pertidaksamaan kuadrat adalah sebagai berikut:

- Nolkan ruas kanan, kemudian pindahkan suku kanan ke ruas kiri.
- Faktorkan menjadi faktor-faktor linier.
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian.
  Jika sulit difaktorkan maka:
- Untuk $D > 0$ gunakan rumus abc
- Untuk $D < 0$ maka berlaku:
  - $a > 0$ maka fungsinya adalah definit positif atau lebih dari nol.
  - $a < 0$ maka fungsinya adalah definit negatif atau kurang dari nol.

c. Pertidaksamaan Pecahan

Bentuk umum:

$$\boxed{\frac{a}{b} > \frac{c}{d},\ b \neq 0 \text{ dan } d \neq 0}$$

Langkah-langkah umum penyelesaian pertidaksamaan pecahan adalah sebagai berikut:

- Nolkan ruas kanan dengan memindahkan suku kanan ke ruas kiri.
- Faktorkan pembilang dan penyebut menjadi faktor-faktor linier.
- Buatlah garis bilangan untuk menentukan penyelesaian.

d. Pertidaksamaan Bentuk Akar

Bentuk umum:

1. $\sqrt{f(x)} > g$
   - Jika g > 0 maka solusinya adalah $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 > g^2$ dan f (x) > 0.
   - Jika g < 0 maka solusinya adalah f (x) > 0.
2. $\sqrt{f(x)} < g$
   - Jika g > 0 maka solusinya adalah $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2 < g^2$ dan f (x) > 0.
   - Jika g < 0 maka tidak mempunyai solusi.

e. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Bentuk umum:

- Jika $|f(x)| < g$ maka $f(x) < g$ dan $f(x) > -g$ atau
  ditulis: $-g < f(x) < g$
- Jika $|f(x)| < g$ maka $f(x) < g$ dan $f(x) < -g$
- Jika $|f(x)| > g$ maka $f(x) > g$ dan $f(x) < -g$
- Jika $|f(x)| < |g(x)|$ maka:
  $(f(x) + g(x)).(f(x) - g(x)) < 0$
- Jika $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} < k$ maka:
  $(f(x) - k.g(x)).(f(x) + k.g(x)) < 0$

Bab 6

Logika Matematika

A. Pernyataan, Kalimat Terbuka, dan Ingkaran

- **Pernyataan** adalah suatu kalimat yang dapat ditentukan salah atau benar, tetapi tidak kedua-duanya.
  Contoh:
  1. Tambun berada di Kabupaten Bekasi (Benar)
  2. 9 adalah bilangan prima (Salah)
- **Kalimat terbuka** adalah kalimat yang masih mengandung variabel atau peubah dan belum dapat ditentukan kebenarannya. Jika variabel tersebut diganti dengan konstanta maka akan menjadi pernyataan.
  Contoh:
  1. $3x - 9 = 12$
  2. $x + 5 = 19$
- **Negasi atau ingkaran** adalah pernyataan baru dengan nilai kebenaran berlawanan dengan nilai pernyataan semula. Negasi dinotasikan dengan " $\sim$ ".
  Contoh:
  a. Pernyataan
     $p : 6 > 2$ (B) maka $\sim p : 6 \leq 2$ (S)
  b. Hari ini hujan.
     Negasinya: Hari ini tidak hujan

B. Operasi Logika Matematika

a. Konjungsi

Konjungsi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata penghubung ''dan''. Konjungsi dari pernyataan p dan q dilambangkan $p \wedge q$.
Dua pernyataan $p \wedge q$ bernilai benar hanya jika pernyataan p benar dan q juga benar.
Tabel kebenarannya:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

b. Disjungsi

Disjungsi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata penghubung ''atau''. Disjungsi dari pernyataan p dan q ditulis dengan $p \vee q$.
Dua pernyataan $p \vee q$ bernilai salah hanya jika pernyataan p salah dan q juga salah.
Tabel kebenarannya:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

c. Implikasi

Implikasi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata ''jika... maka...''. Implikasi dari pernyataan p dan q ditulis $p \rightarrow q$.
Dua pernyataan $p \rightarrow q$ bernilai salah hanya jika pernyataan p benar dan q salah.

Tabel kebenarannya:

p	q	$p \to q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

d. Biimplikasi

Biimplikasi adalah penggabungan dua pernyataan menggunakan kata penghubung "jika dan hanya jika". Biimplikasi dari pernyataan p dan q ditulis $p \leftrightarrow q$.
Dua pernyataan $p \leftrightarrow q$ bernilai salah hanya jika kedua pernyataan bernilai sama.
Tabel kebenarannya:

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

C. Pernyataan Majemuk

a. Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen

Dua pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen ($\equiv$) jika kedua pernyataan majemuk tersebut mempunyai nilai kebenaran yang sama.
Contoh:
$p \to q \equiv \sim p \vee q$
Dapat dibuktikan dengan tabel kebenaran, yaitu:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \to q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

b. Negasi Pernyataan Majemuk

- $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- $\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
- $\sim\exists \equiv \forall \Leftrightarrow \sim\forall \equiv \exists$

Simbol: $\forall$ dibaca "untuk setiap/semua"
Simbol: $\exists$ dibaca "sebagian/ada beberapa"

D. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Jika implikasi $p \to q$ maka:
- $q \to p$ disebut konvers dari $p \to q$
- $\sim p \to \sim q$ disebut invers dari $p \to q$
- $\sim q \to \sim p$ disebut kontraposisi dari $p \to q$

E. Penarikan Kesimpulan

a. Prinsip Modus Ponens

Bentuk umum:
Premis 1 : $p \to q$ = benar
Premis 2 : p = benar
Kesimpulan : q = benar

Contoh:
Premis 1 : Jika saya makan maka saya kenyang.
Premis 2 : Saya makan.
Kesimpulan : Saya kenyang.

b. Prinsip Modus Tollens

Bentuk umum:
Premis 1 : $p \to q$ = benar
Premis 2 : $\sim q$ = benar
Kesimpulan : $\sim p$ = benar

Contoh:
Premis 1 : Jika saya rajin belajar maka nilai saya bagus.
Premis 2 : Nilai saya buruk.
Kesimpulan : Saya malas belajar.

c. Prinsip Silogisme

Bentuk umum:
Premis 1 : $p \to q$ = benar
Premis 2 : $q \to r$ = benar
Kesimpulan : $p \to r$ = benar

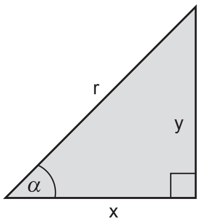
Contoh:
Premis 1 : Jika saya rajin belajar maka nilai saya bagus.
Premis 2 : Jika nilai saya bagus maka saya naik kelas.
Kesimpulan : Jika saya rajin belajar maka saya akan naik kelas.

Bab 7

Trigonometri

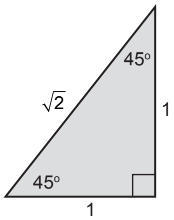
A. Perbandingan Trigonometri

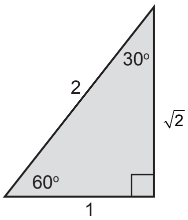
a. Perbandingan Sisi Suatu Segitiga Siku-siku



- $\sin \alpha = \frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- $\tan \alpha = \frac{y}{x}$
- $\text{ctg } \alpha = \frac{x}{y}$
- $\sec \alpha = \frac{r}{x}$
- $\text{cosec } \alpha = \frac{r}{y}$

b. Nilai Perbandingan Sudut-sudut Istimewa





x	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Keterangan: ∞ = tidak terdefinisi (tak berhingga)

B. Rumus Sudut yang Berelasi

Pada tiap kuadran, nilai sin, cos, dan tan dapat bernilai positif atau negatif. Tabel di bawah ini menunjukkan tanda di setiap kuadran.

Fungsi	Kuadran			
	I 0°—90°	II 90°—180°	III 180°—270°	IV 270°—360°
Sin	+	+	–	–
Cos	+	–	–	+
Tan	+	–	+	–

Hubungan dari sin, cos, dan tan pada masing-masing kuadran adalah:

a. Pada Kuadran I (0°—90°)

$\sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan (90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$

b. Pada Kuadran II (90°—180°)

$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan (180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$

c. Pada Kuadran III (180°—270°)

$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan (180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$

d. Pada Kuadran IV (270°—360°)

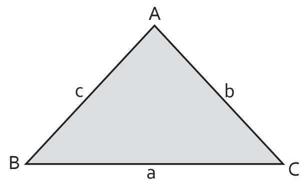
$\sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\tan (360^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$

C. Rumus-Rumus Segitiga Dalam Trigonometri

a. Hubungan Sin, Cos, dan Tan

1. $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
3. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

b. Pada Setiap Segitiga Sembarang Berlaku



1. Aturan sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. Aturan kosinus

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

3. Luas segitiga ABC

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$

D. Rumus-Rumus Trigonometri

a. Jumlah dan Selisih Dua Sudut

sin (A + B) = sin A cos B + cosA sinB
sin (A – B) = sin A cos B – cos A sin B
cos (A + B) = cos A cos B – sin A sin B
cos (A – B) = cos A cos B + sin A sin B

$$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

b. Sudut Rangkap atau Kembar

- sin 2A = 2 sin A cos A
- cos 2A = $\cos^2 A - \sin^2 A$
  = $2\cos^2 A - 1$
  = $1 - 2\sin^2 A$
- tan 2A = $\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

c. Perkalian Sinus dan Kosinus

2 sin A cos B = sin (A + B) + sin (A – B)
2 cos A sin B = sin (A + B) – sin (A – B)
2 cos A cos B = cos (A + B) + cos (A – B)
–2 sin A sin B = cos (A + B) – cos (A – B)

d. Penjumlahan dan Pengurangan Sinus dan Kosinus

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

E. Grafik Fungsi Trigonometri

a. f(x) = A cos (kx + b) = $A\cos k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)$

b. f(x) = A sin (kx + b) = $A\sin k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)$

Untuk menggambar grafik fungsi y = f(x) = $A\cos k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)$ atau y = $A\cos k\left(x + \dfrac{b}{k}\right)$ gunakan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Gambar grafik y = cosx atau y = sin x
2. Kalikan semua ordinatnya (y) dengan k
3. Geser grafik ke kiri sejauh $\dfrac{b}{k}$ jika $\dfrac{b}{k}$ positif, dan geser grafik ke kanan sejauh $\dfrac{b}{k}$ jika $\dfrac{b}{k}$ negatif.
4. Periode grafik adalah $\dfrac{2\pi}{k}$

F. Persamaan dan Pertidaksamaan Trigonometri

a. Persamaan Trigonometri

1. Persamaan dasar

$$\sin x = \sin a \begin{cases} x = a + k.2\pi \\ x = (\pi - a) + k.2\pi \end{cases}$$

$\cos x = \cos a \rightarrow x = \pm a + k \cdot 2\pi$

$\tan x = \tan a \rightarrow x = a + k\pi$

2. Persamaan yang diselesaikan dengan faktorisasi

Contoh:

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos x &= 0 \\ 2 \sin x \cos x + \cos x &= 0 \\ \cos x (2 \sin x + 1) &= 0 \\ \cos x = 0 \text{ atau } 2 \sin x + 1 &= 0 \\ 2 \sin x &= -1 \\ \sin x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Persamaan yang dapat diubah ke bentuk persamaan kuadrat

Contoh:

$\cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0$

Misalkan, cos x = p maka persamaan di atas menjadi:

$p^2 + 3p - 4 = 0$

Kemudian selesaikan seperti penyelesaian persamaan kuadrat.

4. Bentuk persamaan $a\sin x + b\cos x = c$ dapat diubah menjadi dengan syarat $a^2 + b^2 \geq c^2$, di mana:

$k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan tan a = $\frac{a}{b}$.

b. Pertidaksamaan Trigonometri

Pertidaksamaan trigonometri dapat diselesaikan dengan:

a. Menggambar grafiknya.
b. Menggunakan garis bilangan seperti pertidaksamaan biasa.
c. Untuk soal-soal pilihan ganda bisa dilakukan cara uji pilihan ganda.

Bab 8

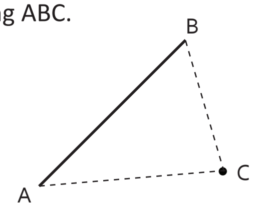
Dimensi Tiga

A. Pengertian Titik, Garis, dan Bidang pada Bangun Ruang

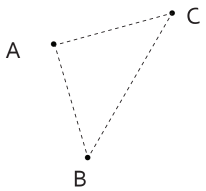
- Titik adalah sebuah noktah. **Contoh:** titik A (• A).
- Garis lurus dilukiskan dengan menghubungkan dua buah titik.

  Contoh:
  Garis AB menghubungkan titik A dan titik B.

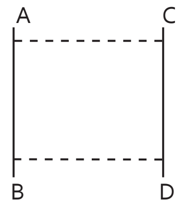
- Bidang datar dapat dilukiskan dengan unsur-unsur berikut ini:
  1. Sebuah garis lurus dan sebuah titik di luar garis.
     Contoh:
     Garis AB dengan titik C membentuk bidang ABC.



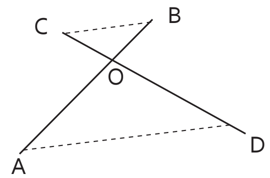
  2. Tiga buah titik yang tidak terletak segaris. **Contoh:**
     Titik A, B, dan C membentuk bidang ABC.



  3. Dua garis sejajar.
     Contoh:
     Garis sejajar AB dan CD membentuk bidang ABCD.



  4. Dua garis yang berpotongan.
     Contoh:
     Garis AB dan CD berpotongan membentuk bidang AOD atau COB.

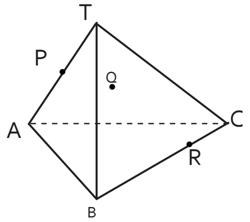


- Bangun ruang tersusun atas bidang-bidang yang membentuk ruangan, seperti kubus, balok, prisma, limas, dan lain sebagainya.
- Garis dikatakan tegak lurus dengan bidang jika garis tersebut membentuk sudut 90^0 terhadap dua garis pada suatu bidang.

B. Irisan Bangun Ruang

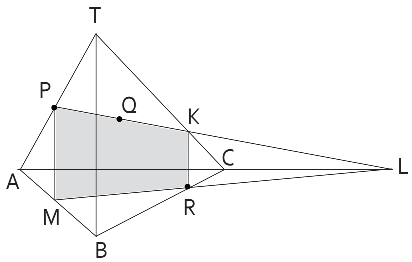
Irisan bidang a dengan bangun ruang adalah bidang datar yang dibatasi oleh garis potong-garis potong bidang a dengan sisi-sisi bangun ruang tersebut.

Irisan bidang dapat digambarkan dengan cara menggambarkan sumbu afinitas.
Sumbu afinitas adalah garis potong antara bidang irisan dengan alas bagian ruang yang diirisnya.



Pada gambar di atas, diketahui limas T.ABC. Titik P pada rusuk TA, titik Q pada bidang ACT, dan titik R pada rusuk BC. Lukis garis potong-garis potong bidang yang melalui P, Q, R dengan sisi limas.
Langkah-langkah:

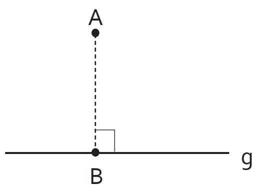
1. Tarik garis PQ sehingga memotong rusuk TC di K dan memotong rusuk perpanjangan AC di L.
2. Hubungkan L dengan R sehingga memotong BC dan AB di R dan M.
3. Hubungkan K ke R dan P ke M sehingga terlukis bidang PKRM.
   Garis potong-garis potongnya adalah PK, KR, RM, MP.



Garis LRM disebut sumbu afinitas.

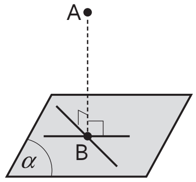
C. Proyeksi

a. Proyeksi Titik pada Garis



Titik B = proyeksi titik A pada garis g.

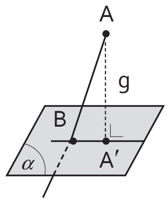
b. Proyeksi Titik pada Bidang



Titik B = proyeksi titik A pada bidang α (AB tegak lurus bidang a).

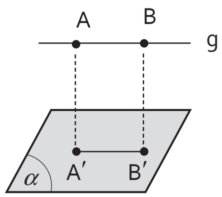
c. Proyeksi Garis pada Bidang

1. Garis g menembus bidang a



Garis AB menembus bidang α dititik B. Titik A' = proyeksi titik A pada bidang α. Proyeksi garis AB ke bidang α adalah BA'.

2. Garis g sejajar bidang a



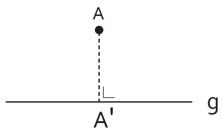
Garis AB sejajar bidang α. Titik A' dan B' = proyeksi titik A dan B pada bidang α. Proyeksi garis AB ke bidang α adalah A'B'.

D. Jarak Dalam Bangun Ruang

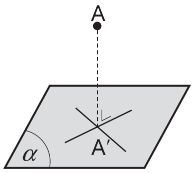
1. *Jarak titik A ke titik B* adalah panjang ruas garis AB, dihitung dengan menggunakan rumus:

Jarak AB = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

2. *Jarak antara titik A ke garis g* adalah panjang garis AA', di mana A' adalah proyeksi titik A ke garis g.

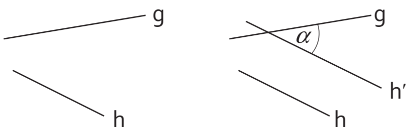


3. *Jarak antara titik A ke bidang* α adalah panjang ruas garis AA', di mana A' adalah proyeksi titik ke bidang α.

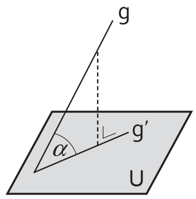


E. Sudut Dalam Bangun Ruang

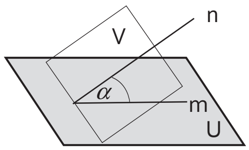
1. *Sudut antara dua garis yang bersilangan*
   Buatlah garis h' yang sejajar dengan garis h dan memotong garis g maka terbentuk sudut α, yaitu sudut antara perpotongan garis g dengan h'.



2. *Sudut antara garis dengan bidang*.
   Sudut antara garis g dengan bidang U adalah sudut α yang dibentuk antara garis g dengan proyeksi garis g, yaitu g' pada bidang U.



3. *Sudut antara bidang dengan bidang*
   Sudut antara bidang U dengan bidang V adalah sudut α yang dibentuk oleh m dan n masing-masing pada bidang U dan V. Garis m dan n tersebut tegak lurus dengan garis potong antara bidang U dan V.



Bab 9

Statistika

A. Pengertian

Statistika adalah salah satu cabang dari matematika yang berkaitan dengan cara pengumpulan data, penyusunan data, penyajian data, dan pengolahan data, kemudian hasilnya dapat digunakan untuk pengambilan keputusan atau kesimpulan sesuai karakteristik data tersebut.

B. Rumus Untuk Data Tunggal

Misalkan, diketahui data-data sebagai berikut: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_n maka:

1. Mean (rataan hitung) = $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

atau

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots\dots\dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots\dots\dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

2. Modus (Mo) adalah nilai data yang paling banyak muncul (data yang frekuensinya terbesar).
3. Median (Me) adalah nilai tengah data setelah data disusun dari yang terkecil hingga terbesar.

   Median membagi data tersusun menjadi dua bagian sama banyak.

$$\boxed{Me = X_{\frac{n+1}{2}}}$$

Untuk jumlah data (n) ganjil

$$\boxed{Me = \frac{1}{2}\left(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}\right)}$$

Untuk jumlah data (n) genap

4. Kuartil (Q) adalah nilai data yang membagi sekelompok data menjadi 4 bagian sama banyak. Kuartil data terdiri atas kuatil bawah (Q_1), kuartil tengah (Q_2), dan kuartil atas (Q_3). Di mana kuartil tengah (Q_2) = Median (Me).
5. Jangkauan (J) adalah nilai data terbesar dikurangi nilai data terkecil.

$$\boxed{J = X_n - X_1}$$

6. Jangkauan antarkuartil

$$\boxed{H = Q_3 - Q_1}$$

7. Jangkauan semi interkuartil atau simpangan kuartil (Q_d)

$$\boxed{Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}$$

8. Simpangan rata-rata

$$\boxed{S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|}$$

9. Ragam atau variansi

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|^2$$

10. Simpangan baku

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|^2}$$

C. Rumus Untuk Data Kelompok

a. Mean atau Rataan Hitung

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Keterangan:

$\bar{x}_s$ = rataan sementara (nilai dari salah satu titik tengah interval kelas)

x_i = titik tengah interval kelas data ke-i

d_i = $x_i - \bar{x}_s$

x_i = frekuensi kelas ke-i

b. Modus (Mo)

$$Mo = t_b + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Di mana:

$d_1 = f_0 - f_{-1}$

$d_2 = f_0 - f_{+1}$

Keterangan:

t_b = tepi bawah kelas modus data

p = panjang interval kelas

f_{-1} = frekuensi kelas data sebelum kelas modus

f_o = frekuensi kelas modus

f_{+1} = frekuensi kelas data setelah kelas modus

c. Kuartil (Q_n)

$$Q_n = t_b + p\left(\frac{\frac{n}{4}\sum f - f_{kn}}{f_{Qn}}\right), \text{dimana } n = 1, 2, 3$$

Keterangan:

Untuk n = 2, berarti rumus Q_2 = median

t_b = tepi bawah kelas kuartil ke-n (Q_n)

p = panjang interval kelas

$\sum f$ = jumlah frekuensi

f_{kn} = frekuensi kumulatif sebelum kelas Q_n

f_{Qn} = frekuensi kelas Q_n

D. Perubahan Data

Jika terjadi perubahan pada data tunggal dengan nilai perubahan sama untuk setiap data maka perubahannya adalah:

Statistik	Setiap nilai data di:			
	Tambah p	Kurangi p	Kali p	Bagi P
$\bar{x}$	$\bar{x}' = \bar{x} + p$	$\bar{x}' = \bar{x} - p$	$\bar{x}' = p\,\bar{x}$	$\bar{x}' = \bar{x} : p$
M_o	$M_o' = M_o + p$	$M_o' = M_o - p$	$M_o' = p\,M_o$	$M_o' = M_o : p$
Q	Q' = Q + p	Q' = Q – p	Q' = p Q	Q' = Q : p
J	J' = J	J' = J	J' = p.J	J' = J : p
SR	SR' = SR	SR' = SR	SR' = p.SR	SR' = SR : p
Qd	Qd' =Qd	Qd' =Qd	Qd' =p.Qd	Qd' = Qd : p
S	S' = S	S' = S	S' = p.S	S' = S : p

Keterangan:

$\bar{x}$: rata-rata

M_o : modus

Q : kuartil

J : jangkauan

SR : simpangan rata-rata

Qd : simpangan kuartil

S : simpangan baku

Bab 10

Peluang

A. Kaidah Pencacahan

a. Aturan Pengisian Tempat

Jika suatu kejadian dapat terjadi dalam p cara berlainan dan kejadian berikutnya dapat terjadi dalam q cara berlainan maka kedua kejadian tersebut dapat terjadi dalam (p x q) cara.

b. Notasi Faktorial

Perkalian bilangan asli yang pertama disebut faktorial (!).

n! dibaca "n faktorial"

$$n! = n\times(n-1)\times(n-3)\times......3\times2\times1$$

Contoh:

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

1! = 1

0! = 1

c. Permutasi

Banyak permutasi (susunan yang memerhatikan urutan) k unsur dari n unsur adalah:

$$P(n,k) = \quad = \frac{n!}{(n-k)!}, \text{ dimana } n \geq k$$

Contoh:

Ada berapa cara 4 orang duduk berjajar pada tiga kursi yang disediakan?

Jawab:

$$P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24 \text{ cara}$$

Jenis-jenis permutasi, antara lain:

1. **Permutasi yang memuat beberapa unsur yang sama**

   Jika ada beberapa susunan n unsur dengan n_1 unsur sama, n_2 unsur sama, dan seterusnya maka:

$$P = \frac{n!}{n_1!\times n_2!\times....} \text{ cara}$$

2. **Permutasi siklis (melingar)**

   Jika tersedia n unsur yang berbeda maka banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut adalah:

$$P(\text{siklis}) = (n-1)! \text{ cara}$$

B. Kombinasi (C)

Banyak kombinasi (susunan acak) k unsur dari n unsur yang tersedia adalah:

$$C(n,k) = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ dimana } n \geq k$$

C. Teorema Binomial Newton

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + ... + C(n,n)b^n$$

Contoh:

$$(x+y)^4 = 1.x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1.y^4$$

D. Peluang Suatu Kejadian

a. Menghitung Peluang Suatu Kejadian

Peluang suatu kejadian A dirumuskan sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{k}{s} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan:

k = hasil kejadian A
s = seluruh hasil yang mungkin terjadi
n(A) = banyak anggota himpunan A
n(S) = banyak anggota himpunan ruang sampel
n = banyaknya percobaan
P(A) = peluang kejadian A

b. Kisaran Nilai Peluang

Nilai peluang berkisar antara $0 \leq P(A) \leq 1$. Untuk P(A) = 1, artinya kejadian A pasti terjadi, sedangkan P(A) = 0, artinya kejadian A tidak mungkin terjadi.

c. Frekuensi Harapan Kejadian a ($f_h(a)$)

$$f_h(a) = P(A) \times N$$

Keterangan:

$f_h(a)$ = frekuensi harapan kejadian a
N = banyak percobaan
P(A) = peluang kejadian A

E. Peluang Kejadian Majemuk

a. Peluang Gabungan Dua Kejadian

Misalkan, A dan B adalah dua kejadian yang terdapat dalam ruang sampel S maka peluang gabungan dua kejadiannya dituliskan sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Keterangan:

P(A) = peluang kejadian A
P(B) = peluang kejadian B
$P(A \cup B)$ = peluang kejadian A atau B
$P(A \cap B)$ = peluang kejadian A dan B

b. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Peluang dua kejadian A dan B yang saling lepas dituliskan sebagai berikut:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

c. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Bebas

Kejadian A dan B disebut saling bebas jika dan hanya jika:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

d. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Jika diketahui kejadian A maka komplemen kejadian A dinotasikan dengan A^c dan peluang dari A^c ditulis $P(A^c)$ dan dirumuskan sebagai berikut:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Keterangan:

$P(A^c)$ = peluang kejadian komplemen A
P(A) = peluang kejadian A

e. Kejadian Bersyarat

Peluang munculnya kejadian A dengan syarat kejadian B muncul adalah:

$$P\langle A|B\rangle = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ atau}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P\langle A|B\rangle \text{ dengan } P(B) \neq 0.$$

Analog dengan rumus di atas diperoleh:

$$P\langle B|A\rangle = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ atau}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P\langle B|A\rangle \text{ dengan } P(A) \neq 0.$$

Keterangan:

$P\langle A|B\rangle$ = peluang kejadian A setelah kejadian B

$P(A \cap B)$ = peluang kejadian A dan B

$P(A)$ = peluang kejadian A

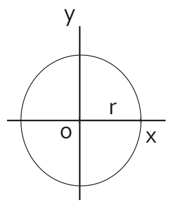
$P(B)$ = peluang kejadian B

Bab 11

Lingkaran

A. Persamaan Lingkaran

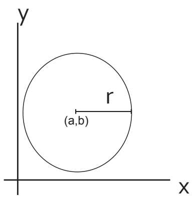
1. Persamaan lingkaran yang berpusat di O (0, 0) dengan jari-jari r adalah:



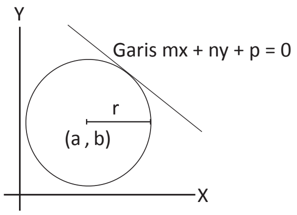
$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. Persamaan lingkaran yang berpusat di (a, b) dengan jari-jari r adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



3. Persamaan lingkaran yang berpusat di (a, b) menyinggung garis mx + ny + p = 0



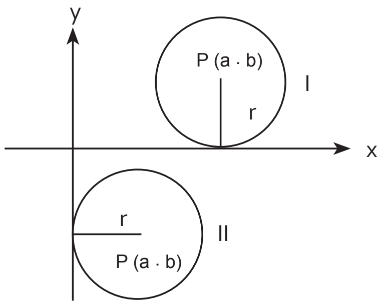
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ dengan } r = \left|\frac{am+bn+p}{\sqrt{m^2+n^2}}\right|$$

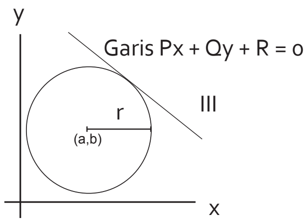
4. Bentuk umum persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ berpusat di $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dengan jari-jari:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

B. Jari-Jari Lingkaran

Untuk memperjelas pengertian lingkaran perhatikan gambar di bawah ini:





(I) Lingkaran I:

Menyinggung sumbu x maka $r = |b|$

(II) Lingkaran II:

Menyinggung sumbu y maka $r = |a|$

(III) Jika lingkaran berpusat di (a,b)

Menyinggung garis Px + Qy + R = 0 maka

$$r = \frac{|P.a + Q.b + R|}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

C. Kedudukan Titik Terhadap Lingkaran

Jika persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ maka kuasa titik $P(x_1, y_1)$ terhadap lingkaran adalah:

$$K = x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C$$

1. Titik P (x_1, y_1) terletak di luar lingkaran maka $K > 0$.
2. Titik P (x_1, y_1) terletak pada lingkaran maka $K = 0$.
3. Titik P (x_1, y_1) terletak di dalam lingkaran maka $K < 0$.

D. Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Kedudukan garis ax + by + c = 0 terhadap persamaan lingkaran:

- $x^2 + y^2 = r^2$
- $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$
- $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Ditentukan sebagai berikut:

1. Nyatakan x dalam y atau y dalam x dari persamaan garis ax + by + c = 0.
2. Substitusikan x atau y ke persamaan lingkaran sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam x atau y.
3. Tentukan diskriminan D dari persamaan kuadrat tersebut.

Contoh:

Garis : y = mx + n... (1)

Lingkaran : $x^2 + y^2 + Ax + Bx + C = 0$... (2)

Persamaan (1) disubstitusikan ke persamaan (2) diperoleh:

$x^2 + (mx + n)^2 + Ax + B(mx + n) + C = 0$

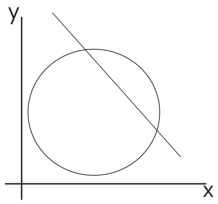
$(1+ m^2)x^2 + (2mn + a + mB)x + (n^2 + Bn + C) = 0$... (3)

Persamaan (3) adalah persamaan kuadrat sehingga hubungan garis dan lingkaran dapat ditentukan nilai diskriminannya (D), yaitu:

$D = (2mn + a + mB)^2 – 4(1 + m^2)(n^2 + Bn + C)$

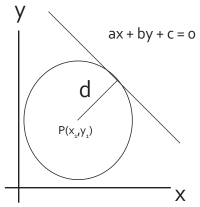
Kedudukan garis terhadap lingkaran ditentukan sebagai berikut:

1. Garis memotong lingkaran di dua titik berlainan apabila nilai diskriminannya lebih dari nol (D > 0).

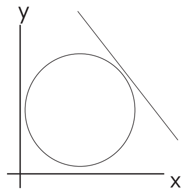


2. Garis menyinggung lingkaran/memotong di satu titik apabila diskriminan hasil substitusi bernilai nol (D = 0).
   Jarak garis ax + by + c = 0 ke pusat ling-karan P (x_1, y_1) dirumuskan dengan:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 \quad b^2}}$$



3. Garis tidak memotong lingkaran maka diskriminan substitusi kurang dari nol 0 (D < 0).



E. Persamaan Garis Singgung Lingkaran Melalui Sebuah Titik pada Lingkaran

a. Persamaan Garis Singgung di Titik (x_1, y_1) pada Lingkaran

1. Jika persamaan lingkaran $x^2+y^2=r^2$ maka persamaan garis singgungnya adalah $xx_1+yy_1=r^2$
2. Jika persamaan lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ maka persamaan garis singgungnya adalah: $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=r^2$
3. Jika persamaan lingkaran

   $x^2+y^2+Ax+By+C=0$maka

   persamaan garis singgungnya adalah:

   $$xx_1+yy_1+A\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+B\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+C=0$$

b. Persamaan Garis Singgung dengan Gradien m pada Lingkaran

1. $x^2+y^2=r^2$ adalah $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
2. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ adalah:

   $y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{m^2+1}$
3. $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ adalah:

   $y+\frac{1}{2}B=m(x+\frac{1}{2}A)\pm r\left(\sqrt{m^2+1}\right)$

Bab 12

Suku Banyak (Polinomial)

A. Pengertian dan Bentuk Suku Banyak

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

- Bentuk di atas dinamakan suku banyak (polinom) berderajat n, bervariabel x, dan n bilangan cacah.
- Derajat polinom ditentukan pangkat tertinggi (n).
- a_n, a_{n-1},..., a_{n-2} disebut koefisien dari x^n, x^{n-1},..., x^{n-2}

  Contoh:

  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 4x - 6$ merupakan polinom berderajat 3 dengan:

  - Koefisien x^3 adalah 1
  - Koefisien x^2 adalah –7
  - Koefisien x adalah 4
  - Suku tetapnya adalah –6

B. Pembagian Suku Banyak

Jika suatu suku banyak dibagi dengan suku banyak lain yang lebih rendah derajatnya atau sama derajatnya akan memberikan sisa pembagian. Jika sisa pembagian 0, berarti suku banyak pembaginya adalah faktor dari suku banyak yang dibagi.

Contoh:

Berapakah hasil $x^2 - 3x - 4$ dibagi x + 2?

Cara 1: Pembagian biasa

$x + 2$ polinom pembagi {P(x)}

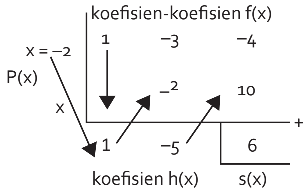
$x^2 - 3x - 4$ polinom yang dibagi {f(x)}

$$\begin{array}{r|l} & x - 5 \\ \hline x + 2 & x^2 - 3x - 4 \\ & \underline{x^2 + 2x} \quad - \\ & \quad -5x - 4 \\ & \quad \underline{-5x - 10} \; - \\ & \qquad 6 \end{array}$$

Jadi, $x - 5$ adalah hasil bagi {h(x)} dan 6 adalah sisa pembagian {s(x)}

Cara 2: Metode sintetik Horner

Koefesien suku-suku dituliskan sebagai berikut:



Langkah-langkah:

1. Menuliskan koefisien x^n dari suku banyak, yaitu 1, –3, dan –4.
2. Menjumlahkan koefisien dimulai dari koefisien paling kiri ke bawah (hasilnya 1).
3. Melakukan operasi pada tanda panah, artinya 1 x (–2) = –2 dan jumlahkan ke bawah lagi.
4. Mengulang langkah ke-3 pada koefisien berikutnya.
5. Maka x – 5 adalah hasil pembagian {h(x)} dan 6 adalah sisa pembagian {s(x)}.

C. Teorema Sisa

- Jika suatu suku banyak f(x) dibagi P(x) akan diperoleh hasil bagi H(x) dan sisa S(x) dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f(x) = P(x).H(x) + S(x)$$

Sehingga jika suku banyak f(x) dibagi (x – n) maka nilai sisanya S(n) sama dengan nilai f(n).

- Jika f (x) suku banyak dibagi dengan (ax + b) maka sisanya adalah $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.
- Jika f(x) suku banyak dibagi oleh $ax^2 + bx + c$ maka sisanya px + q.
- Jika f(x) suku banyak dibagi oleh (x – a) (x – b) maka sisanya dapat dicari dengan rumus:

$$\text{Sisa} = \frac{(x-a)}{(b-a)} \cdot f(b) + \frac{(x-b)}{(a-b)} \cdot f(a)$$

D. Teorema Faktor

- Jika suku banyak dibagi oleh bentuk faktornya maka sisa pembagiannya adalah nol. Sehingga, jika suku banyak f(x) dibagi (x – n), di mana (x – n) adalah faktor dari f(x) maka nilai sisanya sama dengan nilai f(n) = 0.
- Jika pada suku banyak f(x) berlaku f(a) = 0 dan f(b) = 0 maka f(x) habis dibagi (x – a). (x – b).
- Jika (x – n) adalah faktor dari f(x) maka x = n adalah akar dari f(x).

E. Akar-Akar Suku Banyak

Perhatikan suku banyak berderajat n di bawah ini:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$$

1. Nilai x yang memenuhi f (x) = 0 adalah akar-akar atau penyelesaian dari suku banyak tersebut.
2. Untuk mencari akar-akar suku banyak dapat digunakan cara, yaitu:
   - Cara faktorisasi (derajat 2)
   - Cara Horner (derajat 3 atau lebih)

a. Fungsi Berderajat Dua

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

b. Fungsi Berderajat Tiga

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

c. Fungsi Berderajat Empat

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1.x_2.x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

Bab 13

Fungsi Komposisi dan Invers

A. Definisi Fungsi

Fungsi f atau pemetaan f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A (domain) dengan tepat pada satu elemen dari himpunan B (kodomain).

B. Domain dan Range Fungsi

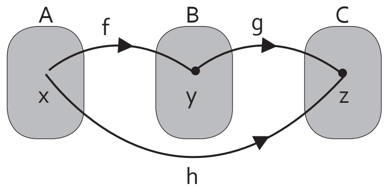
- Daerah asal (domain) fungsi y = f (x) adalah nilai-nilai x supaya y = f (x) ada nilainya (terdefinisi).
- Anggota x disebut domain (daerah asal) dan y disebut range (daerah hasil).
- Syarat domain agar fungsi di bawah ini terdefinisi adalah:
  1. $y = \sqrt{f(x)} \rightarrow$ syaratnya: $f(x) \geq 0$
  2. $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \rightarrow$ syaratnya: $g(x) \neq 0$
  3. $y = {}^{a}\log b \rightarrow$ syaratnya $a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$
  4. $y = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \rightarrow$ syaratnya $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$

     dan $g(x) \neq 0$

C. Komposisi Fungsi

Komposisi fungsi adalah pemetaan dua fungsi (lebih) secara berturutan.

Notasi komposisi fungsi sebagai berikut:



$x \in A,\ y \in B$, dan $z \in C$

$f(x) = y,\ g(y) = z$, dan $h(x) = z$

$h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

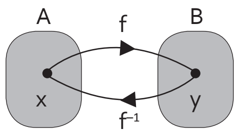
$g \circ f(x)$ dibaca "Komposisi fungsi f dilanjutkan dengan fungsi g".

D. Sifat Komposisi Fungsi

Jika f, g, dan h suatu fungsi maka berlaku:

1. $g \circ f \neq f \circ g$
2. $f \circ I = I \circ f = f,\ I(x) = x \rightarrow$ fungsi identitas
3. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

E. Fungsi Invers



1. Jika x anggota A $(x \in A)$ dan y anggota B $(y \in B)$ maka:

   Fungsi f: A → B, sedangkan invers fungsi f ditulis f^{-1} : B → A.

2. Jika $f(x) = y$ maka $f^{-1}(y) = x$
3. Fungsi f mempunyai fungsi invers jika f korespondensi (berpasangan) satu-satu.
4. Sifat fungsi invers:
   - $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I = x$
   - $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Rumus Ringkas Beberapa Fungsi Invers:

1. $f(x) = ax + b \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{a}x - b \rightarrow f^{-1}(x) = (x+b)a$
3. $f(x) = \sqrt{ax+b} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-b}{a}$
4. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$
5. $f(x) = ax^2 - b \rightarrow f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\dfrac{x+b}{a}}$
6. $f(x) = ax^2 + bx + c$

   $f^{-1}(x) = \dfrac{-b \pm \sqrt{4ax+D}}{2a}$
7. $f(x) = {}^{a}\log nx \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{n}.a^{x}$
8. $f(x) = a^{nx} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1}{n}.{}^{a}\log x$

Bab 14

Limit Fungsi

A. Pengertian Limit

Limit suatu fungsi f(x) untuk x mendekati a adalah L, ditulis:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L}$$

L adalah nilai pendekatan suatu fungsi untuk x disekitar a.

B. Teorema Limit

1. $\lim_{x \to a} b = b$, b adalah konstanta
2. $\lim_{x \to a} (bx + c) = ab + c$
3. $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
4. $\lim_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$
6. Jika $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = L$ maka:

   $\lim_{x \to a} g(x) = \frac{1}{L}$. Syarat: $L \neq 0$
7. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, dengan $g(x) \neq 0$

   Jika f(x) dan g(x) suatu suku banyak maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ dengan $g(a) \neq 0$.

C. Penyelesaian Limit

a. Penyelesaian Umum Limit Fungsi

Penyelesaian umum limit fungsi $\lim_{x \to a} f(x)$ adalah sebagai berikut:

1. Jika nilai f (a) tertentu, yaitu:

   $$\boxed{k, \frac{c}{a}, \frac{c}{a}, \frac{k}{\infty}, \text{ dan } \frac{k}{\infty}}$$

2. Jika f (a) adalah nilai tak tentu, yaitu: $\frac{c}{a}$, $\frac{\infty}{\infty}$, dan $\infty - \infty$ maka f(x) harus diubah ke dalam bentuk tertentu.

b. Mengubah Bentuk Tak Tentu Menjadi Bentuk Tertentu

1. Bentuk tak tentu:

   $$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \frac{o}{o}}$$

   Dapat diselesaikan dengan tiga cara, yaitu:
   - ❑ Faktorisasi
   - ❑ Kali sekawan (jika bentuk akar)
   - ❑ Dalil L'Hospital (turunan limit)

   $$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f'(x)}$$

2. Bentuk tak tentu:

   $$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\infty}{\infty}}$$

   Dapat diselesaikan dengan dua cara, yaitu:
   - ❑ Membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi.

- Rumus:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^m + d}{bx^n + c} \begin{cases} m > n, \text{hasilnya} = \infty \\ m = n, \text{hasilnya} = \frac{a}{b} \\ m < n, \text{hasilnya} = 0 \end{cases}$$

3. Bentuk tak tentu:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty - \infty$$

Pada umumnya berbentuk:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$$

Dapat diselesaikan dengan cara, yaitu:

- Kalikan dengan akar sekawan, selanjutnya membagi pembilang dengan penyebut dengan x pangkat tertinggi.
- Gunakan konsep jitu, yaitu:

Hasil limitnya = $\frac{b-p}{2\sqrt{a}}$, jika a = p

Hasil limitnya = $-\infty$, jika a < p

Hasil limitnya = ∞ , jika a > p

D. Penyelesaian Limit Fungsi Trigonometri

Untuk limit fungsi trigonometri digunakan beberapa cara, yaitu:

1. Rumus dasar limit trigonometri

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

2. Jika fungsinya mudah diturunkan maka gunakan dalil L' Hospital (turunan limit).

Rumus limit fungsi trigonometri adalah:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{ax} = \frac{b}{a}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan bx}{ax} = \frac{b}{a}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{\tan ax} = \frac{b}{a}$

Jika terdapat fungsi cos maka diubah terlebih dahulu menjadi:

$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x$ atau

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Rumus trigonometri yang sering digunakan untuk menguraikan soal limit, yaitu:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3. $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
4. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
5. $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$
6. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$
7. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$
8. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$
9. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$

Bab 15

Turunan Fungsi

A. Definisi Turunan

Turunan pertama fungsi y terhadap x didefinisikan sebagai:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nilai fungsi turunan f ' untuk x = a adalah

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

B. Sifat-Sifat Turunan Fungsi

Untuk U = g(x), V = h (x), dan c = konstanta maka berlaku:

$y = c$	→	$y' = 0$
$y = c.V$	→	$y' = c.V'$
$y = U \pm V$	→	$y' = U' \pm V'$
$y = U.V$	→	$y' = U'.V + U.V'$
$y = \frac{U}{V}$	→	$y' = \frac{U'.V - U.V'}{V^2}$
$y = U^n$	→	$y' = n.U^{n-1}.U'$

C. Rumus Turunan Fungsi

a. Turunan Fungsi Aljabar

$f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$

$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

b. Turunan Fungsi Trigonometri

$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\mathrm{cosec}^2\, x$

$f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$

$f(x) = \mathrm{cosec}\, x \rightarrow f'(x) = -\mathrm{cosec}\, x \cot x$

Untuk U = U (x), dapat dirumuskan menjadi:

$f(x) = \sin u \rightarrow f'(x) = u' \cos u$

$f(x) = \cos u \rightarrow f'(x) = -u' \sin u$

$f(x) = \tan u \rightarrow f'(x) = u' \sec^2 u$

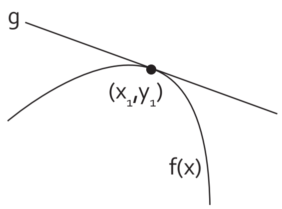
$f(x) = \cot u \rightarrow f'(x) = -u' \mathrm{cosec}^2\, u$

$f(x) = \sin^n u \rightarrow f'(x) = n.\sin^{n-1} u.\ (u' \cos u)$

$f(x) = \cos^n u \rightarrow f'(x) = -n.\cos^{n-1} u.\ (u' \sin u)$

D. Aplikasi Turunan

a. Menentukan Gradien Garis Singgung Kurva



Titik (x_1, y_1) adalah titik singgung garis g dengan kurva y = f (x).

Gradien (kemiringan) garis singgung kurva y = f (x) adalah m = f '(x_1) maka persamaan garis singgungnya: $y - y_1 = m (x - x_1)$

b. Menentukan Interval Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Fungsi akan naik jika f '(x) > 0 dan fungsi akan turun jika f '(x) < 0.

c. Menentukan Titik Stasioner

Fungsi y = f(x) mengalami stasioner jika f '(x) = 0 dan terdapat titik-titik stasioner.

Jenis-jenis titik stasioner:

1. Titik balik maksimum
   Syarat: f '(x) = 0 dan f ''(x) < 0
2. Titik balik minimum
   Syarat: f '(x) = 0 dan f ''(x) > 0
3. Titik belok horizontal
   Syarat: f '(x) = 0 dan f ''(x) = 0

d. Menyelesaikan Soal-Soal Terapan

Langkah-langkah menentukan maksimum dan minimum dalam soal-soal terapan.

1. Tuliskan rumus apa yang maksimum atau minimum dalam soal tersebut.
2. Jika rumus maksimum dan minimum tersebut lebih dari satu variabel maka jadikan satu variabel dengan persamaan lain.
3. Tentukan kondisi stasioner fungsi
4. Jawablah yang ditanyakan soal.

Bab 16

Integral

A. Definisi dan Sifat-Sifat Integral

Integral fungsi merupakan kebalikan dari turunan (antidifferensial).

$$f(x) \underset{\text{Integral}}{\overset{\text{Differensial}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

Jenis-jenis integral, antara lain:

a. Integral tak tentu

$$\boxed{\int f'(x)\,dx = f(x) + c}$$

b. Integral tertentu

$$\boxed{\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)}$$

Sifat-sifat integral, yaitu:

1. $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
5. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
6. $\int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$
7. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

B. Integral Fungsi Aljabar dan eksponen

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
3. $\int ax^n dx = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + C$
4. $\int k\,dx = kx + c$
5. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + c$
7. $\int e^x\,dx = e^x + C$

C. Rumus Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

a. Integral dengan Variabel Sudut x dan Sudut ax

1. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
2. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
3. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$
4. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$
5. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

b. Integral dengan Bentuk Pangkat

1. $\int \sin^n x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C$
2. $\int \cos^n x \cdot \sin x \, dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + C$
3. $\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$, jika n ganjil
4. $\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx$, jika n ganjil
5. $\int \sin^n x dx = \int (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}} dx$, jika n genap
6. $\int \cos^n x \, dx = \int (\cos^2 x)^{\frac{n}{2}} \, dx$, jika n genap

D. Integral Tertentu

- Integral tertentu adalah integral yang memiliki nilai batas-batas tertentu.
- Jika f(x) adalah fungsi kontinu dan terdefinisi pada interval $a \le x \le b$ maka integral tertentu f(x) terhadap x dari x = a sampai x = b dirumuskan oleh:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

F(x) : Hasil integral

a : Batas bawah

b : Batas atas

E. Teknik Integral

a. Teknik Substitusi

Misalkan, u = g(x) dengan g(x) merupakan fungsi yang mempunyai turunan maka:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx$$

Dapat diubah menjadi:

$$\int f(u).du$$

Jika F(u) adalah anti-urunan dari f(u) maka dapat dituliskan:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c$$

Contoh:

- $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$
- $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
- $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
- $\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$

b. Teknik Parsial

Teknik parsial biasanya digunakan untuk mencari integral suatu fungsi yang tidak dapat dicari menggunakan teknik substitusi.

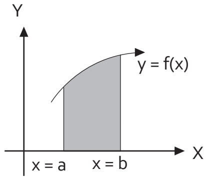
Jika u = f(x) dan v = g(x) maka berlaku rumus:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

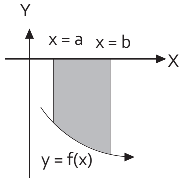
F. Aplikasi Integral

a Menghitung Luas daerah

Luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu x:

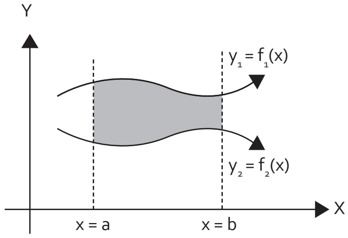


$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$



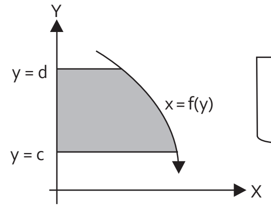
$$L = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Luas daerah yang dibatasi dua buah kurva terhadap batas sumbu x:

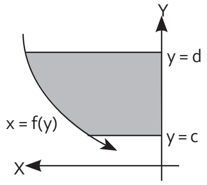


$$L = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

Luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu y:



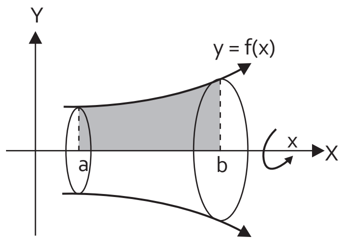
$$L = \int_c^d f(y)\,dy$$



$$L = -\int_c^d f(y)dy = \left|\int_c^d f(y)dy\right|$$

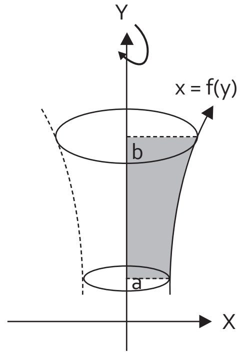
b. Menghitung Volume Benda Putar

Volume benda putar terhadap sumbu x



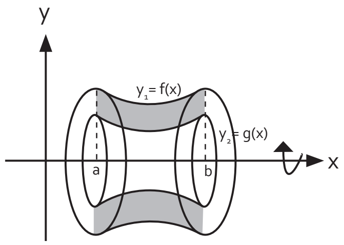
$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Volume benda putar terhadap sumbu y

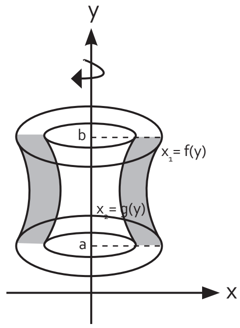


$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dx$$

Volume daerah yang dibatasi dua buah kurva terhadap batas sumbu x:



$$V = \pi\int_a^b (y_1^{\,2} - y_2^{\,2})dx$$



$$V = \pi\int_a^b (x_1^{\,2} - x_2^{\,2})dy$$

Bab 17

Persamaan Garis Lurus dan Program Linear

A. Persamaan Garis Lurus

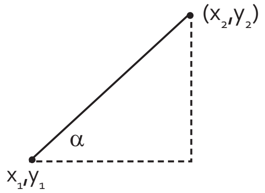
Bentuk umum persamaan garis lurus:
Bentuk eksplisit : $y = m\,x + c$, dengan m adalah gradien garis

Bentuk implisit : $A\,x + b\,y + c = 0$

dengan gradien $m = -\dfrac{b}{a}$

B. Kemiringan Garis Lurus (Gradien)

Gradien (m) adalah ukuran kemiringan suatu garis. Pada gambar di bawah ini gradien sama dengan tangen a (tan a).



$$\boxed{\text{Gradien (m)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan a}$$

C. Menyusun Persamaan Garis Lurus

a. Jika Diketahui Sebuah Titik (x_1, y_1) dan Gradien (m)

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

b. Jika Diketahui Dua Titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

atau

$$\boxed{(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + (x_1y_2 - x_2y_1)}$$

D. Hubungan Dua Garis Lurus

Jika garis $a_1x + b_1y = c_1$ dan garis $a_2x + b_2y = c_2$ yang memilki gradien $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ dan $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$ terdapat hubungan sebagai berikut:

(i). Dua garis saling sejajar jika:

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

(ii). Dua garis tegak lurus jika:

$$\boxed{m_1 \times m_2 = -1}$$

(iii). Dua garis saling berimpit jika:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

(iv). Dua garis membentuk sudut a jika:

$$\boxed{\tan a = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|}$$

E. Menggambar Kurva Garis Lurus

Menghubungkan dua titik koordinat yang terletak pada persamaan garis lurus tersebut.

Contoh: Gambar kurva garis lurus $2x - 3y = 12$!

- **Tahap 1**

  Tentukan koordinat titik potongnya terhadap sumbu-Y dengan cara mensubstitusikan $x = 0$:

  $$\begin{aligned} 2(0) - 3y &= 12 \\ -3y &= 12 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

  Jadi, koordinat titik potong terhadap sumbu-Y adalah (0, –4).

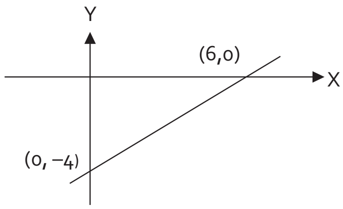
- **Tahap 2**

  Tentukan koordinat titik potongnya terhadap sumbu-X dengan cara mensubstitusikan $y = 0$:

  $$\begin{aligned} 2x - 3(0) &= 12 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

  Jadi, koordinat titik potong terhadap sumbu-X adalah (6,0)

  Jadi, gambar kurvanya adalah:



F. Program Linear

Program linear adalah suatu metode matematika untuk mencari nilai optimum suatu fungsi sasaran/objektif dalam bentuk linear pada daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear.

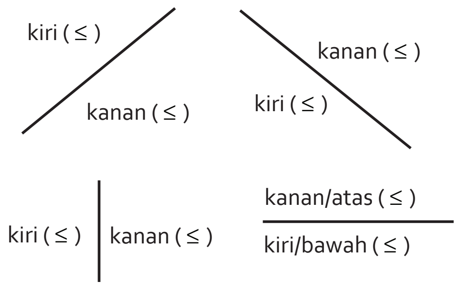
Sistem pertidaksamaan linear menentukan daerah penyelesaian, kemudian titik-titik pojok pada daerah penyelesaian tersebut menentukan nilai optimum dari suatu fungsi sasaran.

a. Menentukan Daerah Penyelesaian

Daerah penyelesaian masalah program linear, yaitu suatu model matematika yang berbentuk pertidaksamaan linear $ax + b \leq c$ atau $ax + by \leq c$.

Daerah penyelesaian dapat ditentukan dengan cara berikut:

1. Jika $ax + by \leq c$ maka daerah penyelesaian berada di sebelah kanan garis, dengan syarat: koefisien x positif ($a > 0$).
2. Jika $ax + b \leq c$ maka daerah penyelesaian berada di sebelah kiri garis, dengan syarat koefisien x positif ($a > 0$).



b. Menentukan Nilai Optimum

Untuk menentukan nilai optimum (maksimum dan minimum) dapat digunakan:

Cara 1: Dengan uji titik-titik sudut

Langkah-langkah:

1. Buat model matematika
2. Gambar grafik daerah penyelesaiannya
3. Tentukan titik-titik sudut dari grafik himpunan penyelesaian
4. Substitusikanlah titik-titik tersebut ke dalam fungsi sasaran

Cara 2: Dengan menggunakan garis selidik

Langkah-langkah:

1. Buat model matematika
2. Gambar grafik daerah penyelesaiannya
3. Membuat persamaan garis selidik (diambil dari fungsi objektif)
4. Titik-titik yang dilalui garis selidik yang paling kanan atau yang paling kiri merupakan penyelesaian optimum

Bab 18

Matriks

A. Definisi Matriks

- Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang yang diatur dalam baris dan kolom.
- Banyaknya baris dan kolom disebut ordo matriks.
- Contoh bentuk matriks:

Ordo matriks (baris dan kolom)

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Baris 1} \\ \text{Baris 2} \end{array}$$

Nama matriks

Kolom 1 Kolom 2 Kolom 3

B. Jenis-Jenis Matriks

a. Matriks Persegi

Matriks persegi, yaitu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama, berordo n x n.

Contoh:

$A_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ordo matriks 2 x 2.

b. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya memiliki satu baris dan beberapa kolom.

Contoh: $A_{1\,x\,3} = (3 \quad -4 \quad 0)$

c. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya memiliki satu kolom.

Contoh: $A_{3\,x\,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ordo matriks 3 x 1

d. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks yang memiliki elemen diagonal utamanya 1, dan sisanya 0.

Contoh: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Sifatnya: A x I = 1 x A = A

C. Transpose Matriks

- Transpose matriks A adalah matriks baru yang diperoleh dengan cara menukar elemen baris menjadi elemen kolom, atau sebaliknya.
- Jika diketahui sebuah matriks:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ maka transpose matriks A

dituliskan: $A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

D. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama bila memiliki ordo sama dan elemen yang posisinya seletak besarnya sama.

Contoh:

Jika $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Di mana a = p, b = q, c = r, dan d = s

E. Operasi Matriks

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan bila ordonya sama dan elemen yang posisinya seletak dapat dijumlah atau dikurangi.

Contoh:

Misalkan, A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan B $\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

Maka A $\pm$ B adalah:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} (a \pm m) & (b \pm n) \\ (c \pm o) & (d \pm p) \end{pmatrix}$$

b. Perkalian Matriks

Perkalian dengan bilangan konstanta dapat dilakukan dengan mengalikan ke setiap elemen matriks tersebut.

Contoh:

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Perkalian matriks dengan matriks, syaratnya kolom matriks A sama dengan baris matriks B.

$$\boxed{A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}}$$

Cara mengalikan: elemen baris pada matriks pertama dikali dengan elemen kolom pada matriks kedua hingga semua elemen terkalikan.

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan B $\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$

Maka A x B adalah:

$$\boxed{A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.m + b.o & a.n + b.p \\ c.m + d.o & c.n + d.p \end{pmatrix}}$$

f. Determinan Matriks

- Misalkan, A adalah matriks persegi berordo 2 x 2 maka determinan matriks A adalah hasil kali elemen-elemen yang berada pada diagonal utama dikurangi hasil kali elemen-elemen yang berada pada diagonal samping.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Determinan (A) adalah:

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Jika B adalah matriks berordo 3 x 3 seperti di bawah ini:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Maka determinan B adalah:

$$|B| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

= (aei + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

Sifat-sifat determinan matriks:

1. $|A| = |A^T|$
2. $AB = C \rightarrow |A||B| = |C|$
3. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$
4. $|k.A| = k^n |A|$

Di mana, k = konstanta dan n = ordo matriks persegi.

G. Invers Matriks

a. Dua Matriks Saling Invers

- Dua matriks saling invers terjadi jika A dan B adalah matriks persegi yang berordo sama dan memilki hubungan syarat:

$$\boxed{A . B = B. A = I \text{ (I = matriks identitas)}}$$

- Maka dikatakan A adalah invers B dan B adalah invers A.
- Invers A dinotasikan dengan A^{-1}, sedangkan invers B dinotasikan dengan B^{-1}.

b. Invers Matriks Persegi Berordo 2x2

Jika diketahui matriks A adalah:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Maka invers matriks A adalah:

$$\boxed{(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

c. Sifat-sifat Invers Matriks

1. $A^{-1}A = AA^{-1} = \text{Identitas (I)}$
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $AB = C \begin{cases} A = CB^{-1} \\ B = A^{-1}C \end{cases}$

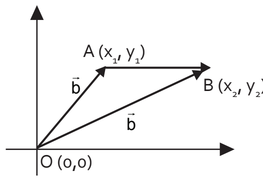
Bab 19

Vektor

A. Definisi Vektor

- Vektor adalah besaran yang memiliki nilai dan arah. **Contoh:** gaya dan percepatan dalam bidang fisika.
- Vektor digambarkan dengan garis anak panah. **Contoh:** panjang garis (dari A ke B) adalah besar nilai vektor. Arah panah menunjukkan arah vektor.
- Simbol vektor dituliskan dengan tanda panah di atas ($\overrightarrow{AB} = \vec{a}$) atau dengan huruf tebal (**AB** **= a**).

Jika diketahui vektor **a** dan **b** pangkalnya melalui titik asal O (0,0) dan memiliki koordinat di titik A (x_1,y_1) dan B (x_2,y_2) maka vektor **OA** atau **OB** disebut vektor posisi **a** atau **b**. Sedangkan, vektor **AB** ditentukan oleh:



$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$
$$\overrightarrow{AB} = \left((x_2 - x_1),(y_2 - y_1)\right)$$

Maka panjang vektor **a, b,** dan **AB** dirumuskan oleh:

1. Panjang vektor posisi $\vec{a}$ adalah:

$$|a| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$$

2. Panjang vektor posisi $\vec{b}$ adalah:

$$|b| = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

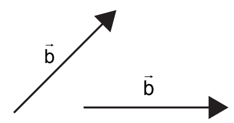
3. Panjang vektor posisi $\overline{AB}$ adalah:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

B. Operasi Vektor

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan

Jika diketahui terdapat dua buah vektor **a** dan **b** maka penjumlahan vektor **a** dan vektor **b** dapat dilakukan dengan metode sebagai berikut:

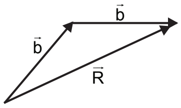


Penjumlahan ($\vec{a} + \vec{b}$)

1. Metode segitiga

Langkah-langkah penjumlahan ($\vec{a} + \vec{b}$):

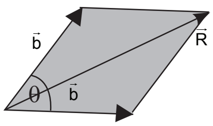
- Letakkan pangkal vektor **b** berimpit dengan ujung vektor **a**.
- Tarik garis dari pangkal vektor **a** ke ujung vektor **b** maka vektor **R** adalah hasil penjumlahan kedua vektor tersebut ($\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$).



2. **Metode jajargenjang**

Langkah-langkah penjumlahan ($\vec{a}+\vec{b}$):

- Letakkan pangkal vektor **a** dan b saling berimpit.
- Tarik garis putus-putus sejajar vektor a dan b sampai bertemu pada satu titik.
- Tarik garis dari pangkal kedua vektor sampai titik pertemuan garis putus-putus tersebut maka vektor R adalah hasil penjumlahan kedua vektor tersebut ($\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}$).



Besar vektor hasil penjumlahan secara geometris:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}$$

Keterangan:

$\left|\vec{a}\right|$ = panjang vektor **a**

$\left|\vec{b}\right|$ = panjang vektor **b**

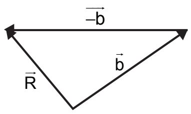
θ = sudut antara vektor **a** dan vektor **b**

Pengurangan ($\vec{a}-\vec{b}$)

1. **Metode segitiga**

Langkah-langkah pengurangan ($\vec{a}-\vec{b}$):

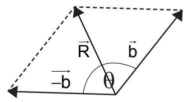
- Letakkan pangkal negatif vektor **b** berimpit dengan ujung vektor **a.**
- Tarik garis dari pangkal vektor **a** ke ujung negatif vektor **b** maka vektor **R** adalah hasil pengurangan kedua vektor tersebut ($\vec{R}=\vec{a}-\vec{b}$).



2. **Metode jajargenjang**

Langkah-langkah pengurangan ($\vec{a}-\vec{b}$):

- Letakkan pangkal vektor a dan negatif vektor **b** saling berimpit.
- Tarik garis putus-putus sejajar vektor **a** dan negatif vektor **b** sampai bertemu pada satu titik.
- Tarik garis dari pangkal kedua vektor sampai titik pertemuan garis putus-putus tersebut maka vektor **R** adalah hasil pengurangan kedua vektor tersebut ($\vec{R}=\vec{a}-\vec{b}$).



Besar vektor hasil pengurangan secara geometris:

$$\boxed{\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}}$$

Keterangan:

$\left|\vec{a}\right|$ = panjang vektor **a**

$\left|\vec{b}\right|$ = panjang vektor **b**

θ = sudut antara vektor **a** dan vektor **b**

b. Operasi Perkalian Vektor dengan Bilangan Real (Skalar)

1. Jika m adalah bilangan real dan $\vec{a}$ adalah vektor maka hasil kalinya:

$$\boxed{m\cdot\vec{a} = \vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\text{....(sebanyak m kali)}}$$

2. Jika nilai m adalah bilangan real positif maka vektor m. $\vec{a}$ searah dengan vektor $\vec{a}$
3. Jika nilai m adalah bilangan real negatif maka vektor m. $\vec{a}$ berlawanan arah dengan vektor $\vec{a}$

c. Sifat Operasi Penjumlahan, Pengurangan, dan Perkalian dengan Bilangan Real

1. Sifat komutatif, yaitu:

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2. Sifat asosiatif, yaitu:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

3. Sifat identitas (vektor nol), yaitu:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

4. Memiliki invers, yaitu vektor lawannya:

$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=0$$

C. Vektor di Ruang Tiga Dimensi

a. Vektor Satuan

1. Vektor satuan adalah vektor yang memiliki besar satu satuan.
2. Jika vektor **a** berada di ruang tiga dimensi maka posisinya bisa dituliskan di dalam koordinat (x,y, dan z).

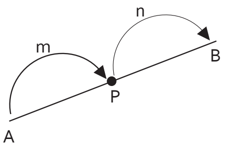
Contoh: $\vec{a}=\left(\vec{xi}+\vec{yj}+\vec{zk}\right)$

Dimana:

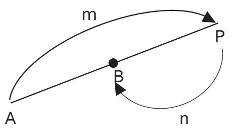
$\vec{i}$ = vektor satuan di sumbu x
$\vec{j}$ = vektor satuan di sumbu y
$\vec{k}$ = vektor satuan di sumbu z

b. Pembagian Ruas Garis dalam Bentuk Vektor dan Koordinat

1. Pembagian dalam ruas garis

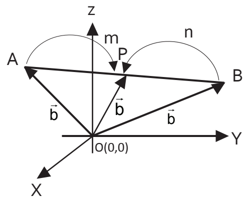


Titik P berada di antara titik A dan B dan membagi garis AB dengan perbandingan AP : PB = m : n



Titik P membagi garis AB di luar dengan perbandingan AP : PB = m : (–n)

2. Pembagian dalam bentuk vektor



Jika $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{p}$ adalah vektor posisi dari titik A, B, dan P dengan perbandingan AP : PB = m : n.

Maka:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{m}{n}$$

$$\begin{aligned}
n\cdot(\vec{p}-\vec{a}) &= m\cdot(\vec{b}-\vec{p})\\
n\cdot\vec{p}-n\cdot\vec{a} &= m\cdot\vec{b}-m\cdot\vec{p}\\
n\cdot\vec{p}+m\cdot\vec{p} &= m\cdot\vec{b}+n\cdot\vec{a}\\
\vec{p}(n+m) &= m\cdot\vec{b}+n\cdot\vec{a}\\
\vec{p} &= \frac{m\cdot\vec{b}+n\cdot\vec{a}}{(n+m)}
\end{aligned}$$

3. Pembagian dalam bentuk koordinat

Jika titik P (x_p, y_p, z_p) membagi garis AB di mana A (x_1, y_1, z_1) dengan perbandingan $\overrightarrow{AP}:\overrightarrow{PB}=m:n$ maka:

$$\boxed{\begin{aligned}
x_p &= \frac{m\cdot x_2+n\cdot x_1}{m+n},\\
y_p &= \frac{m\cdot y_2+n\cdot y_1}{m+n},\\
z_p &= \frac{m\cdot z_2+n\cdot z_1}{m+n}
\end{aligned}}$$

D. Perkalian Skalar Dua Vektor

a. Perkalian Skalar Dua Vektor

Perkalian skalar antara vektor **a** dan **b** dituliskan dengan notasi $\vec{a}.\vec{b}$ (dibaca: a dot b) yang didefinisikan sebagai berikut:

1. Jika diketahui dua vektor berbentuk komponen:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \text{ dan } \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

Maka: $\vec{a}.\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$

2. Jika dua vektor membentuk sudut q maka perkalian skalarnya adalah:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

Dengan: $|\vec{a}|$ = panjang vektor a

$|\vec{b}|$ = panjang vektor b

θ = sudut antara a dan b

Sedangkan sudutnya adalah:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Tanda perkalian skalar:

$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ atau positif maka sudut dua vektor lancip

$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ atau positif maka sudut dua vektor tumpul

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ atau maka sudut dua vektor saling tegak lurus

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ maka sudut dua vektor berimpit atau sejajar

b. Sifat-Sifat Perkalian Skalar Dua Vektor

1. Sifat komutatif: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. Sifat distributif: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
3. Jika k skalar, $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ vektor di mana:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Maka berlaku:

$$\vec{a}.\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{b}.\vec{b} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|.\cos\theta}$$

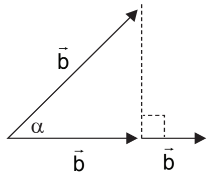
$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|.\cos\theta}$$

Keterangan:

θ : Sudut antara vektor a dan vektor b

E. Proyeksi Vektor

Jika vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ mengapit sudut a dengan panjang $|\vec{a}|$ dan $|\vec{b}|$ seperti gambar di bawah ini:



Keterangan:

$\vec{c}$ = vektor proyeksi dari vektor $\vec{a}$ ke vektor $\vec{b}$

Maka berlaku:

1. Proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah:

$$\boxed{|\vec{c}| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$$

2. Proyeksi skalar ortogonal vektor $\vec{b}$ pada vektor $\vec{a}$ adalah:

$$\boxed{|\vec{c}| = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

3. Proyeksi vektor ortogonal vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah:

$$\boxed{\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}}$$

4. Proyeksi vektor ortogonal vektor $\vec{b}$ pada vektor $\vec{a}$ adalah:

$$\boxed{\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}}$$

Bab 20

Transformasi Geometri

A. Pengertian Transformasi

Transformasi adalah suatu proses pemetaan suatu objek ke objek lain dalam satu bidang.

Jika titik A (x,y) ditransformasikan oleh transformasi T akan menghasilkan A' (x',y').

$$A(x,y) \xrightarrow{T} A'(x',y') \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Di mana $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = matriks transformasi

B. Jenis-jenis Transformasi

a. Translasi (Pergeseran)

Suatu objek P ditranslasikan oleh T maka hasilnya P'.

$$P(x,y) \xrightarrow{\binom{a}{b}} P'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = x' - a \\ y = y' - b \end{pmatrix}$$

T(a, b) berarti:

1. Objek digeser sejauh a satuan ke kanan (+)/kiri (–).
2. Objek digeser sejauh b satuan ke atas (+)/ bawah (–).

b. Refleksi (Pencerminan)

Pencerminan Terhadap	Pemetaan	Matriks Transformasi
Sumbu X	(x, y) $\rightarrow$ (x, –y)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Sumbu Y	(x, y) $\rightarrow$ (–x, y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Garis Y = X	(x, y) $\rightarrow$ (–x, y)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Garis X = –Y	(x, y) $\rightarrow$ (–y, –x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Titik asal O	(x, y) $\rightarrow$ (–x, –y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Garis x = k	(x, y) $\rightarrow$ (2k–x, y)	
Garis y = h	(x, y) $\rightarrow$ (x, 2h–y)	

c. Rotasi (Perputaran)

1. Rotasi terhadap titik O (0,0)

Rotasi	Pemetaan	Matriks Transformasi
$\frac{\pi}{2}$ atau $-\frac{\pi}{2}$	(x, y) $\rightarrow$ (–y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$-\frac{\pi}{2}$ atau $\frac{3\pi}{2}$	(x, y) $\rightarrow$ (y, –x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\pm\pi$	(x, y) $\rightarrow$ (–x, –y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

α	$(x, y) \rightarrow (x', y')$ $x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha$ $y' = x \sin\alpha - y \cos\alpha$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

2. Rotasi terhadap titik (a, b)

   Jika titik A (x,y) dirotasikan sebesar a terhadap titik (a,b) berlaku hubungan:

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

d. Dilatasi (Perkalian atau Pembesaran)

Suatu titik A (x,y) didilatasikan dengan pusat O (0,0) dengan faktor skala k akan mempunyai bayangan A'(x',y') dapat dituliskan:

$$A(x,y) \xrightarrow{[O,k]} A'(kx,ky) \text{ atau } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & o \\ o & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jika titik A (x,y) didilatasikan pada titik P (a,b) dengan faktor skala k maka bayangan A'(x',y') dapat dirumuskan:

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & o \\ o & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

C. Komposisi Transformasi

a. Komposisi dua translasi berurutan T_1 dilanjutkan T_2 dapat diganti dengan translasi tunggal (komposisi kedua translasi).

$$T = T_1 \circ T_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

b. Komposisi dua refleksi berurutan menghasilkan translasi dua kali jarak antara dua sumbu. Urutan refleksi menentukan arah translasi.

   Misalkan, M_1 dan M_2 adalah refleksi terhadap garis x = a dan x = b maka:

$$P(x,y) \xrightarrow{M_1 \circ M_2} P'(2(a-b)+x, y)$$
$$P(x,y) \xrightarrow{M_1 \circ M_2} P'(2(a-b)+x, y)$$

c. Komposisi dua rotasi yang sepusat sebesar θ_1 dilanjutkan θ_2 dapat diganti dengan rotasi sebesar ($\theta_1 + \theta_2$) dengan pusat rotasi sama.

D. Luas Bangun Hasil Suatu

Transformasi

Suatu bangun A ditransformasikan dengan matriks $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, hasilnya bangun A' maka luas A' = $|ad - bc| \times$ luas A (luas bayangan = determinan (M) x Luas semula).

Bab 21

Baris dan Deret

A. Notasi Sigma

Notasi sigma atau $\sum$ digunakan untuk menyatakan operasi penjumlahan bilangan berurutan.

Sifat-sifat notasi sigma:

1. $\sum_{i=m}^{n} i = \sum_{p=m}^{n} p$
2. $\sum_{i=m}^{n} ki = k\sum_{i=m}^{n} i$, k = konstanta
3. $\sum_{i=m}^{a-1} ki + \sum_{i=a}^{n} ki = \sum_{i=m}^{n} ki$
4. $\sum_{i=m+a}^{n+a} (i-a) = \sum_{i=m-a}^{n-a} (i+a)$
5. $\sum_{i=m}^{n} ai \pm \sum_{i=m}^{n} bi = \sum_{i=m}^{n} (ai \pm bi)$

B. Pengertian Barisan dan Deret

a. Pengertian Barisan

Barisan adalah rangkaian bilangan yang disusun menurut aturan atau pola tertentu.

Bentuk umum barisan adalah sebagai berikut:

$$U_1, U_2, U_3 .... U_n$$

Keterangan:

U_1 = suku pertama

U_2 = suku kedua

U_3 = suku ketiga

U_n = suku ke –n

b. Pengertian Deret

Deret adalah penjumlahan suku-suku suatu barisan bilangan.

Bentuk umum deret adalah:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$$

Keterangan:

S_n = jumlah n suku pertama

C. Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang mempunyai beda (selisih) yang tetap untuk setiap dua suku yang berurutan.

Bentuk umum barisan aritmetika adalah:

$$U_1, U_2, U_3 .... U_n$$
$$a, a + b, a + 2b, ..., a + (n - 1)b$$

Pada barisan aritmetika terdapat beberapa rumusan sebagai berikut:

- Rumus beda (b)

$$b = U_n - U_{n-1}$$
$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = U_5 - U_4$$

- Rumus mencari suku ke – n

$$U_n = a + (n-1)\,b$$

U_1 = a = suku pertama/suku awal
U_2 = a + b
U_3 = a + 2b
U_4 = a + 3b
U_5 = a + 4b

Contoh:
Barisan aritmetika:
3, 7, 11, 15, 19...
Tentukan suku ke-10?

Pembahasan:

b = $U_2 - U_1$ = 7 – 3 = 4
Suku ke –10 adalah:
$U_n = a + (n-1) \cdot b$
$U_{10} = 3 + (10-1)\,.4$
$= 3 + (9.4) = 3 + 36 = 39$

b. Deret Aritmetika

Bentuk umum deret aritmetika adalah:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$
$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n-1)b)$$

Pada deret aritmetika terdapat rumusan sebagai berikut:

- Rumus mencari jumlah n suku pertama

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)b\right]$$

S_n adalah jumlah n suku yang pertama.

- Rumus mencari suku tengah
Jika banyak sukunya ganjil maka terdapat suku tengah (U_t):

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

Hubungan antara jumlah n suku pertama dan suku tengah adalah:

$$S_n = n \times U_t$$

Contoh:
Deret aritmetika:
3 + 7 + 11 + 15 + 19 + ...
Tentukan jumlah 10 suku pertama?

Pembahasan:
Perhatikan barisan aritmetika di atas:
n = 10, a = 3, dan b = 7 – 3 = 4

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1).b)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2.3 + (10-1).4)$$
$$= 5\,(6 + 36) = 210$$

D. Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Bentuk umum barisan geometri adalah sebagai berikut:

$$U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots U_n$$
$$a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^{n-1}$$

Pada barisan geometri terdapat beberapa rumusan sebagai berikut:

- Rumus rasio (r)

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2}$$

- Rumus mencari suku ke – n

$$U_n = ar^{n-1}$$
$$U_1 = a,\ U_2 = ar,\ U_3 = ar^2$$

Contoh:
Barisan geometri:
2, 6, 18, 54, ...
Tentukan U_{10} dan rasionya?

Rasionya adalah:

$$r = \frac{6}{2} = \frac{18}{6}$$
$$= \frac{54}{18} = 3$$

Maka, suku ke –10 adalah:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_{10} = 2 \cdot 3^{10-1}$

$= 2 \cdot 3^9 = 39.366$

Contoh:

Deret geometri:

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$

Tentukan jumlah suku ke-5 pertama?

Rasio deret geometri tersebut adalah:

$R = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

Karena r < 1 maka jumlah 5 suku pertamanya adalah:

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_5 = \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{242}{243}}{\frac{2}{3}}$

$S_5 = \frac{242}{243} \times \frac{3}{2} = \frac{726}{486} = \frac{363}{243}$

b. Deret Geometri

Bentuk umum dari deret geometri sebagai berikut:

$U_1 + U_2 + U_3 . + ... + U_n$
$a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

Rumus mencari jumlah n suku pertama pada deret geometri:

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$, **jika r > 1**

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, **jika r < 1**

E. Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang memiliki jumlah suku sampai tak terhingga.

Deret geometri tak hingga dibedakan menjadi:

a. Deret Geometri Divergen

Syarat deret geometri divergen: jika $r < -1$ atau $r > 1$

Contoh:

$2 + 6 + 18 + 54 + ... + \sim \rightarrow S_\infty = \sim$

S_∞ = jumlah suku-suku sampai tak terhingga

b. Deret Geometri Konvergen

Syarat deret geometri konvergen: jika $-1 < r < 1$

Contoh:

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + 0$

Maka rumus jumlah suku sampai tak terhingga (S_∞) adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Untuk jumlah tak hingga suku-suku bernomor ganjil saja adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r^2}$$

Sedangkan, jumlah tak hingga suku-suku bernomor genap saja adalah:

$$S_\infty = \frac{ar}{1-r^2}$$